

APUNTES DE ÓPTICA

LUIS MIGUEL SÁNCHEZ BREA



Grado en Ciencias Físicas, 17-18, Grupo A

Universidad Complutense de Madrid
Departamento de Óptica
Facultad de Ciencias Físicas

Febrero 2018 – version 2017-2018.1

Luis Miguel Sánchez Brea
Apuntes de Óptica©,
Universidad Complutense de Madrid
Grado en Ciencias Físicas, 17-18, Grupo A
Febrero 2018

RESUMEN

Estos apuntes están enfocados a la asignatura “Óptica” de 2º de grado en Física. No pretende ser un libro ni un compendio pormenorizado, sino una guía de las explicaciones realizadas en clase.

La Óptica es un área de interés en Física por cuanto es la ciencia que estudia la generación, propagación y detección de la radiación luminosa. Además, de la Óptica derivan un buen número de aplicaciones y tecnologías que la dan un sentido de utilidad. Por ejemplo, las interferencias son la base de la metrología de precisión; las fibras ópticas son la base de las comunicaciones actuales, el láser ha permitido el desarrollo de numerosas aplicaciones desde la salud, la industria, la electrónica de consumo. Las aplicaciones de la Óptica son, pues, de enorme relevancia y merecen un estudio pormenorizado. En este curso trataremos los fundamentos, partiendo de las ecuaciones de Maxwell, que considera la luz como una onda electromagnética. Se divide la asignatura en 6 bloques:

1. Luz en el vacío.
2. Luz en medios materiales.
3. Interferencias.
4. Difracción.
5. Coherencia.
6. Aplicaciones.

Adicionalmente a estos apuntes, es interesante visitar los siguientes Proyectos de Innovación Educativa específicos para la asignatura Óptica:

- **“Las cámaras digitales aplicadas a enseñanzas de óptica”** 2001 núm. 6
http://webs.ucm.es/info/aocg/pie2001_6/index.htm
Catálogo de experiencias de cátedra.
- **“Experiencias de bajo coste en óptica”** 2002 núm. 3
<http://webs.ucm.es/info/expoptic/>.
Catálogo de experimentos caseros.
- **“Imágenes de fenómenos ópticos cotidianos como apoyo de la docencia en óptica”** 2008 núm. 35
<http://webs.ucm.es/info/gioq/fenopt/index.htm>.
Catálogo de fenómenos ópticos mediante imágenes.
- **“Computación científica con Python para módulos de evaluación continua en asignaturas de ciencias aplicadas”** 2013 núm. 137
<http://webs.ucm.es/info/aocg/python/>.
Simulación de fenómenos ópticos mediante el lenguaje Python.

ÍNDICE GENERAL

I	LUZ EN EL VACÍO	1
1	ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN EL VACÍO	3
1.1	Ecuaciones de Maxwell	4
1.2	Ondas electromagnéticas en el vacío	6
1.3	Características de la luz	7
1.4	Algunas soluciones sencillas a las ecuaciones de Maxwell	8
1.5	Ondas armónicas	10
1.6	Representación compleja	11
1.7	Frentes de onda	12
1.8	Ecuación de Helmholtz	13
1.9	Ondas armónicas planas	13
1.10	Velocidad de fase	16
1.11	Coherencia	18
1.12	Propiedades de la luz	18
1.A	Complemento: Otros tipos de ondas	19
1.B	Complemento: Métodos numéricos	19
2	ENERGÍA DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	23
2.1	La luz como fuente de energía	23
2.2	Vector de Poynting	24
2.3	Vector de Poynting para una onda armónica plana	25
2.4	Promedio temporal del vector de Poynting	26
3	POLARIZACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	29
3.1	Polarización en la vida cotidiana	30
3.2	Polarización de ondas armónicas planas	34
3.2.1	Elipse de polarización	34
3.3	Estados de polarización	36
3.3.1	Polarización lineal	36
3.3.2	Polarización circular	37
3.3.3	Polarización elíptica	37
3.3.4	Luz natural	37
3.4	Caracterización de los estados de polarización: representación de Jones	38
3.4.1	Bases de polarización	39
3.5	Elementos modificadores de la polarización: polarizadores	40
3.5.1	Polarizador lineal	41
3.5.2	Rotación del polarizador	41
3.5.3	Polarizador circular	42
3.5.4	Retardadores lineales	42
3.5.5	Luz que atraviesa varios polarizadores consecutivamente	42
3.6	Ley de Malus	43
3.A	Complemento: Álgebra de polarización	44
3.B	Complemento: caracterización de la elipse de polarización	45
4	INTERACCIÓN LUZ MATERIA: MODELO MICROSCÓPICO CLÁSICO	47
4.1	Modelo de materia: átomo de Lorentz	48
4.1.1	Fuerzas sobre las cargas	49
4.1.2	Ecuación de movimiento de las cargas	50
4.1.3	Solución para la carga ligada	51
4.1.4	Solución para la carga libre	53
4.2	Absorción de la luz por la materia	55

4.2.1	Potencia extraída y esparcida	55
4.3	Generación de luz por la materia	56
4.3.1	Radiación dipolar	57
4.3.2	Carga oscilante	58
4.3.3	Emisión de un oscilador amortiguado	58
4.3.4	Potencia reemitida	61
4.3.5	Muchos elementos dispersores	62
II	LUZ EN MEDIOS MATERIALES	65
5	ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN MEDIOS MATERIALES	67
5.1	Introducción	68
5.2	Medios ópticamente densos: el continuo óptico	68
5.3	Promedio espacial de las ecuaciones de Maxwell	70
5.3.1	Polarización y magnetización	70
5.4	Vectores D y H	71
5.5	Relaciones de constitución lineales	72
5.6	Ecuaciones de Maxwell macroscópicas para ondas armónicas	73
5.7	Clasificación de los medios	74
5.8	Relaciones energéticas	75
6	PROPAGACIÓN EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS	79
6.1	Índice de refracción y vector de ondas complejos	80
6.2	Medios transparentes	82
6.3	Medios absorbentes	83
6.3.1	Vectores k y a paralelos	84
6.3.2	Vectores k y a no paralelos	85
7	MODELO MICROSCÓPICO DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN	87
7.1	Constante dieléctrica microscópica	88
7.1.1	Contribución de las cargas ligadas	88
7.1.2	Contribución de las cargas libres	90
7.2	Índice de refracción	91
7.2.1	Índice de refracción de medios dieléctricos	92
7.2.2	Ecuaciones de Sellmeier y Cauchy	95
7.3	Índice de refracción de medios conductores	98
8	REFRACCIÓN Y REFLEXIÓN EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS	101
8.1	Introducción	102
8.2	Dirección y frecuencia de las ondas	103
8.2.1	Condiciones de frontera	103
8.2.2	Ondas incidente, transmitida y reflejada	105
8.2.3	Aplicación de las condiciones de frontera	106
8.2.4	Ley de <i>Snell</i>	107
8.3	Amplitudes de las ondas	109
8.3.1	Fórmulas de FRESNEL	111
8.3.2	Incidencia normal	112
8.3.3	Segundo medio más denso: $n' > n$	112
8.4	Incidencia oblicua para $n' < n$. Reflexión total	114
8.4.1	Reflexión total interna frustrada	117
8.4.2	Desfases entre las ondas	117
8.5	Relaciones energéticas	118
8.6	Medios absorbentes	123
9	MEDIOS ANISÓTROPOS	129
9.1	Anisotropía natural e inducida	130
9.2	Matriz dieléctrica	131
9.3	Clasificación de los medios anisótropos	132

9.4	Propagación de ondas armónicas planas	132
9.5	Medios uniáxicos	134
9.5.1	Superficie de vectores de onda. Eje óptico	134
9.5.2	Fase y polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria	135
9.5.3	Doble refracción	137
9.6	Elementos anisótropos	138
9.6.1	Láminas retardadoras	138
9.6.2	Medios absorbentes; dicroísmo; polaroides	141
10	PULSOS DE LUZ	143
10.1	Introducción	144
10.2	Propagación de dos ondas planas en el vacío o un medio material de índice constante	144
10.2.1	Efecto Doppler	145
10.3	Propagación de dos ondas planas en un medio dispersivo	146
10.4	Paquete de ondas	147
10.5	Determinación del espectro de un pulso de luz: amplitud de cada frecuencia	148
10.5.1	Ondas de duración finita u ondas cuasi-monocromáticas	148
10.5.2	Pulso exponencial	150
10.5.3	Pulso gaussiano	151
10.6	Propagación de un paquete Gaussiano en el vacío	151
10.7	Paquete gaussiano propagándose en un medio dispersivo	152
10.8	Vector de Poynting de una onda con distintas frecuencias temporales	154
III	INTERFERENCIAS	157
11	INTERFERENCIAS: FUNDAMENTOS	159
11.1	Interferencias de las ondas electromagnéticas	160
11.2	Interferencias entre dos ondas armónicas planas	163
11.2.1	Condiciones para la interferencia	163
12	INTERFERENCIAS POR DIVISIÓN DEL FRENTE DE ONDAS	167
12.1	Introducción	167
12.2	Biprisma de Fresnel	167
12.3	Experimento de la doble rendija de Young	171
12.4	Cálculo riguroso de las interferencias en el biprisma de Fresnel	172
12.5	Otros tipos de interferómetros de división del frente de ondas	174
12.5.1	Espejo de Fresnel	174
12.5.2	Espejo de Lloyd	174
IV	DIFRACCIÓN	177
13	DIFRACCIÓN: FUNDAMENTOS	179
13.1	Introducción	179
13.2	Aproximación de elemento delgado	182
13.2.1	Elementos opacos	185
13.2.2	Elementos dieléctricos	186
13.2.3	Elementos reflectores	186
13.2.4	La lente como elemento difractivo	186
13.3	Propagación de la luz después de la máscara	187
13.4	Descomposición en ondas planas	190
13.4.1	Campo propagado	192
13.4.2	El problema de la polarización	193
14	APROXIMACIÓN DE CAMPO CERCANO	195
14.1	Introducción	195
14.2	Rango de validez	196

14.3	Método de cálculo	196
14.4	Difracción por estructuras unidimensionales	198
14.5	Difracción por un semiplano	198
14.6	Difracción por una rendija	199
14.7	Difracción por una abertura cuadrada	201
14.8	Campo en el plano de Fourier de una lente	201
14.9	Difracción por una abertura circular	202
15	APROXIMACIÓN DE CAMPO LEJANO	207
15.1	Aproximación de Fraunhofer	207
15.2	Aproximación de Fraunhofer en el plano focal de una lente	208
15.3	Propiedades de la transformada de Fourier	209
15.4	Principio de Babinet en aproximación de Fraunhofer	210
15.5	Abertura rectangular	212
15.6	Rendija unidimensional	213
15.7	Difractometría	215
15.8	Doble rendija	216
15.9	Abertura circular	217
15.10	Poder resolutivo de los instrumentos ópticos	218
V	COHERENCIA	221
16	COHERENCIA	223
16.1	Coherencia en campos ópticos	224
16.1.1	Coherencia y distribución espectral	225
16.2	Efecto de la coherencia en la interferencia	226
16.2.1	Visibilidad de las interferencias con luz parcialmente coherente	228
16.3	Efecto de la coherencia en la difracción	228
16.3.1	Tipos de fuentes	230
16.3.2	Difracción con una fuente espacialmente coherente	230
16.3.3	Difracción con fuente espacialmente incoherente: teorema de Van Cittert-Zernike	231
16.3.4	Difracción con fuente parcialmente coherente	232
16.3.5	Ejemplo: doble rendija de Young con fuente de tamaño finito	232
16.3.6	Coherencia de un haz reflejado por una superficie rugosa	234
VI	APLICACIONES	237
17	INTERFERENCIAS POR DIVISIÓN DE LA AMPLITUD	239
17.1	Introducción	239
17.2	Interferómetro de lámina planoparalela	240
17.3	El interferómetro de Michelson	242
17.3.1	Fuentes extensas	245
17.4	Otros tipos de interferómetros por divisor de amplitud	247
18	INTERFERENCIAS POR HACES MÚLTIPLES	253
18.1	Introducción	253
18.1.1	Interferómetro de Fabry-Perot	254
18.1.2	Fineza y visibilidad	257
18.1.3	Poder resolutivo	258
19	REDES DE DIFRACCIÓN	261
19.1	Introducción	262
19.2	Tipos de redes	263
19.3	Descomposición de Fourier	264
19.4	Campo lejano: órdenes de difracción	266
19.5	Poder resolutivo de una red de difracción	269
19.5.1	Solapamiento de los espectros	270

19.6	Campo cercano: efecto Talbot	271
19.7	Objetos aleatoriamente distribuidos	272
19.7.1	Distribución periódica	273
19.7.2	Distribución aleatoria	273
20	PROCESADO ÓPTICO	277
20.1	Campo en el plano focal de una lente	278
20.2	Formación de la imagen como un proceso de difracción	279
20.3	Espectro de Fourier	280
20.3.1	Frecuencias espaciales en redes de difracción	281
20.3.2	Imagen compleja	282
20.4	Tamaño finito de las lentes	282
20.5	Función de transferencia de modulación	284
20.6	Filtrado óptico	285
20.6.1	Filtrado pasa baja	285
20.6.2	Filtrado pasa alta	287
20.6.3	Filtrado pasa banda	289
20.6.4	Filtrado en fase	290
20.A	Complemento: Filtrado en redes de difracción	291
	Bibliografía	294

NOMENCLATURA

α	polarizabilidad
χ_e	susceptibilidad eléctrica
χ_m	susceptibilidad magnética
κ	índice de absorción
λ	Longitud de ondas
$\langle P_e \rangle$	potencia extraída
D	desplazamiento eléctrico
H	campo magnético
M	magnetización
P	polarización
a	vector de atenuación
B	Inducción magnética
E	campo eléctrico
E_{mac}	campo eléctrico macroscópico
j	Corriente de carga eléctrica
k	vector de ondas
P	momento dipolar
\mathcal{T}_{max}	Fineza
μ	grado de coherencia
μ	permeabilidad magnética
μ_0	permeabilidad magnética
ω_0	frecuencia de resonancia
ρ	Densidad de carga eléctrica
σ	conductividad eléctrica
σ_e	sección eficaz de extinción
$\sigma_s(\omega)$	sección eficaz de scattering
$\sigma_T(\omega)$	sección eficaz una carga libre
ε	constante dieléctrica
ε_0	permitividad eléctrica

ε_{gen}	constante dieléctrica generalizada
e	carga del electrón
E_{ω}	espectro de frecuencias para emisión dipolar
F	Fineza
$J(\omega)$	densidad de energía espectral
$J(x_0, x_1)$	Intensidad mutua
l_c	longitud de coherencia
m_e	masa del electrón
MTF	Función de transferencia de la modulación
n	índice de refracción
n_c	índice de refracción
$t(\xi, \eta)$	coeficiente de transmisión
T_0	longitud de correación
V	visibilidad
v_g	velocidad de grupo

Parte I

LUZ EN EL VACÍO

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN EL VACÍO

Y dijo Dios: Haya luz, y hubo luz. Y vio Dios que la luz era buena, y separó Dios la luz de las tinieblas. Y llamó Dios a la luz Día, y a las tinieblas llamó Noche. Y fue la tarde y la mañana el día primero. - Génesis 3:5

Situada la luz en el contexto de los fenómenos electromagnéticos, el estudio de la Óptica implica el conocimiento y manejo correcto de ideas básicas ligadas al carácter vectorial y ondulatorio de la luz y su interacción con la materia. Así, en el marco de la Óptica Electromagnética, estudiaremos el comportamiento de la luz considerando ésta como un ente de carácter electromagnético, incidiendo en las propiedades que tiene. También veremos algunas soluciones sencillas a las ecuaciones de Maxwell, como son las ondas planas y las ondas esféricas, que nos acompañarán a lo largo del curso. Se revisarán conceptos tales como frente de ondas, vector y longitud de onda, velocidad de fase y de grupo, etc.

Índice

1.1	Ecuaciones de Maxwell	4
1.2	Ondas electromagnéticas en el vacío	6
1.3	Características de la luz	7
1.4	Algunas soluciones sencillas a las ecuaciones de Maxwell	8
1.5	Ondas armónicas	10
1.6	Representación compleja	11
1.7	Frentes de onda	12
1.8	Ecuación de Helmholtz	13
1.9	Ondas armónicas planas	13
1.10	Velocidad de fase	16
1.11	Coherencia	18
1.12	Propiedades de la luz	18
1.A	Complemento: Otros tipos de ondas	19
1.B	Complemento: Métodos numéricos	19

Objetivos

- Comprender que la luz es un fenómeno electromagnético descrito por las ecuaciones de Maxwell.
- Saber representar y describir soluciones de las ecuaciones de Maxwell.
- Saber representar las ondas en su forma compleja.
- Conocer las ondas armónicas y planas.
- Describir las propiedades del campo eléctrico.

Referencias generales:

- Cabrera, J.M. and López, F.J. and López, F.J., "Óptica electromagnética", Addison-Wesley (1998).
- Born, M. and Wolf, E., "Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light", Cambridge University Press (1999).
- Akhmanov, SA and Nikitin, S Yu, "Physical optics", Clarendon Press (1997).
- J. D. Jackson, "Electrodinámica clásica", Alhambra (1980).

ECUACIONES DE MAXWELL

La Óptica Electromagnética parte de identificar la luz como un fenómeno electromagnético. En consecuencia la luz está gobernada por las ecuaciones de Maxwell¹, que son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_x, E_y, E_z)^t$ es el campo eléctrico, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (B_x, B_y, B_z)^t$ es la inducción magnética respectivamente, $\rho(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de carga y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ es la corriente². Asimismo $\nabla \cdot$ es la divergencia y $\nabla \wedge$ es el rotacional. Repasemos brevemente estos dos operadores. La divergencia se define como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen conforme dicho volumen tiende a cero³,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.5)$$

siendo S una superficie cerrada alrededor del punto y $d\mathbf{S}$ el elemento de superficie infinitesimal con dirección normal a dicho elemento de superficie (hacia afuera). Su representación diferencial para el caso de coordenadas cartesianas la divergencia se escribe como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.6)$$

En cuanto al rotacional⁴, se define como el límite de la circulación del campo vectorial, cuando la curva sobre la que se integra se reduce a un punto⁵,

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.7)$$

¹ info sobre Maxwell: http://es.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell

info sobre las ecs. de Maxwell: http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_de_Maxwell

² Utilizaremos el sistema internacional de unidades: http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades. Téngase en cuenta que algunos libros sobre Óptica todavía utilizan el sistema CGS.

³ información sobre la divergencia: [http://es.wikipedia.org/wiki/Divergencia_\(matemática\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Divergencia_(matemática))

⁴ lo escribiremos \times o \wedge indistintamente

⁵ información sobre el rotacional: <http://es.wikipedia.org/wiki/Rotacional>

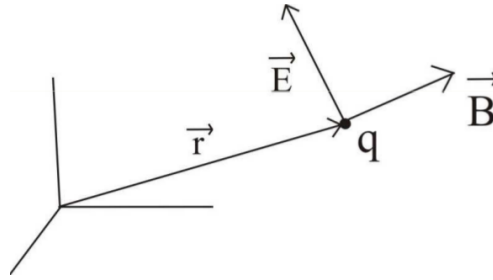


Figura 1.1: Dirección de los distintos vectores involucrados en la fuerza.

donde ΔS es el área de la superficie que rodea la trayectoria y \mathbf{n} es un vector unitario normal a la superficie. En coordenadas cartesianas su representación diferencial resulta

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Las ecuaciones de Maxwell (1.1-1.4), 8 ecuaciones diferenciales parciales vectoriales acopladas, son el fundamento que nos permiten estudiar la propagación de los campos eléctricos y magnéticos. El cómo llegar a estas ecuaciones se estudia en Electromagnetismo. Las ecuaciones de Maxwell consideran la interacción de las ondas con la materia a través de las cargas y las corrientes. Los valores de las constantes ϵ_0 y μ_0 se denominan *permitividad eléctrica* y *permeabilidad magnética* del vacío respectivamente y sus valores son

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi 10^{-7} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}, \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde μ_0 y $c = 299,792,458 \text{ m s}^{-1}$ son constantes en el Sistema Internacional de unidades⁶ (por ello también lo es ϵ_0). Como puede suponerse, estas 8 ecuaciones diferenciales acopladas no se resuelven de forma sencilla excepto para casos excepcionales. Casi todos los fenómenos ópticos (excepto los efectos cuánticos) están representados en estas ecuaciones de Maxwell, por lo que a lo largo de la asignatura vamos a analizarlas en profundidad.

como la onda armónica plana que veremos a continuación

Otra ecuación de interés es la fuerza que ejerce el campo electromagnético sobre la materia, es decir, sobre las cargas. Esta relación viene dada por la fuerza de Lorentz, Figura 1.1,⁷

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (1.10)$$

Las cargas y corrientes son, en realidad, consecuencia del mismo fenómeno. La conservación de la carga relaciona ambos conceptos a través de la *ecuación de continuidad*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.11)$$

es decir, las corrientes se producen cuando hay cargas en movimiento.

⁶ http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades

⁷ info sobre Lorentz: http://es.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Antoon_Lorentz

Lorentz obtuvo el Premio Nobel de Física en 1902, junto con su pupilo Zeeman, por sus investigaciones sobre la influencia del magnetismo en la radiación electromagnética.

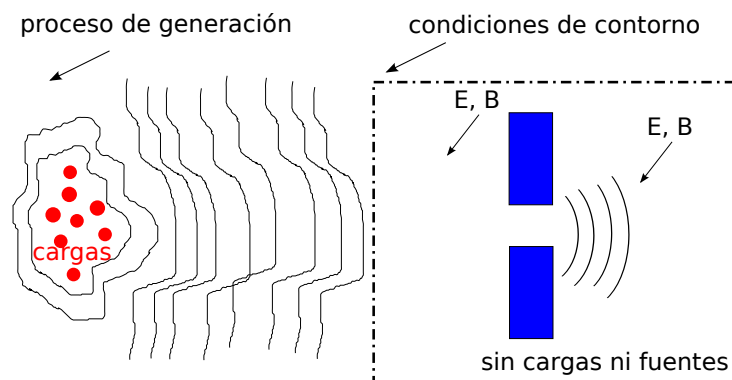


Figura 1.2: Separación del proceso de generación del proceso de propagación en el vacío. Para ello se utilizan condiciones de contorno sobre una frontera.

El modelo electromagnético de la luz, a partir de las ecuaciones de Maxwell, es la teoría más general que estudiaremos para explicar la propagación de la luz. No obstante, en el caso de la interacción con la materia (generación y absorción) el ámbito más adecuado, y que también incluye las ecuaciones de Maxwell, es la Óptica cuántica. En este curso utilizaremos un modelo más sencillo de materia, basado en cargas y corrientes. Este modelo simplificado no se debe considerar como inválido en absoluto, sino que es capaz de resolver una gran cantidad de problemas en el campo de la Óptica.

*Las predicciones
teóricas se ajustan
muy bien a los
resultados
experimentales para
todos los casos
estudiados.*

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN EL VACÍO

Las ecuaciones de Maxwell, (1.1-1.4) nos dicen que para poder generar un campo electromagnético, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, es necesario la presencia de cargas y corrientes $\rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Este proceso de generación lo estudiaremos en el Capítulo 4. En muchas situaciones, no obstante, las fuentes de luz están lejos de la zona de estudio. Por ello, suele ser interesante separar el problema en dos partes: 1. Generación de la luz en la materia (cargas y corrientes) y 2. Propagación de la luz en el vacío (sin cargas ni corrientes), Figura 1.2.

Para tratar el problema de la propagación de la luz en el vacío, por tanto, vamos a asumir que se ha generado una onda electromagnética de alguna forma y conocemos el campo electromagnético en una cierta frontera.

Cuando en nuestro volumen de estudio no tenemos cargas ni corrientes, las ecuaciones de Maxwell resultan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.13)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.14)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Las cargas y las corrientes, no obstante, han tenido que existir para generar las ondas electromagnéticas. Se incluyen en estas ecuaciones como el campo inicial, es decir, son las condiciones de contorno del problema diferencial (1.12-1.15).

Ecuación de ondas

Las ondas electromagnéticas obtenidas serán una solución particular de las ecuaciones de Maxwell. Si combinamos la tercera ecuación con la cuarta obtenemos

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.16)$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

y teniendo en cuenta que $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ se llegan a las siguientes expresiones

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (1.18)$$

donde $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ es la velocidad de propagación de la onda (velocidad de la luz). Las ecuaciones (1.17) y (1.18) son seis ecuaciones de ondas vectoriales desacopladas entre sí

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1.19)$$

donde $U = E_x, E_y, B_z, E_z, B_y, B_x$. No obstante los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} no son independientes entre sí, sino que también se deben cumplir las ecuaciones (1.12) y (1.13). Por ello, no todas las soluciones de la ecuación de ondas (1.19) pueden ser una onda electromagnética.

CARACTERÍSTICAS DE LA LUZ

A partir de las ecuaciones de Maxwell se pueden deducir las siguientes características

- La luz es un campo electromagnético, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, con forma de ondas vectoriales y cuyas soluciones deben cumplir las ecuaciones de Maxwell. Por ello $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ están acoplados entre sí. Para conocer el comportamiento de la luz es necesario conocer $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.
- La luz es generada por cargas y corrientes aceleradas: las cargas $\rho(\mathbf{r}, t)$ y las densidades de corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ no estacionarias generan campos electromagnéticos variables en el tiempo (ondas que se propagarán en el vacío)⁸.
- La luz se puede propagar por el vacío. No hace falta soporte material. La velocidad de la luz en el vacío es una constante.
- Las ondas electromagnéticas transportan energía que actúa sobre las cargas mediante la fuerza de Lorentz.
- Las ecuaciones de Maxwell son lineales en los campos: Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ y $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, entonces $(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ también es solución de las ecuaciones de Maxwell.
- La luz se propaga en la materia alterando la dinámica de sus cargas que, a su vez, genera más luz. La luz se detecta por cambios en la dinámica de las

con el conocimiento actual es una constante universal

⁸ si las cargas no varían en el tiempo generan campos estáticos (no es luz).



Figura 1.3: Onda esférica como solución de la ecuación de ondas.

cargas del detector. La aceleración inducida en las cargas dará lugar a nuevas ondas que se superpondrán con las incidentes, etc. Todo el proceso (generación, propagación, detección) estará sujeto a las ecuaciones de Maxwell.

ALGUNAS SOLUCIONES SENCILLAS A LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Ondas escalares vs. ondas vectoriales

Las ecuaciones de Maxwell tienen un carácter vectorial y sus soluciones, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ son vectores. Es por ello que una solución completa existe indicar todas las componentes. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas, esto significa conocer 6 componentes $\mathbf{E} = [E_x(\mathbf{r}, t), E_y(\mathbf{r}, t), E_z(\mathbf{r}, t)]$ y $\mathbf{B} = [B_x(\mathbf{r}, t), B_y(\mathbf{r}, t), B_z(\mathbf{r}, t)]$. Estas soluciones resuelven el problema completo. Sin embargo, a veces es más sencillo y conveniente resolver las ecuaciones de cada componente de forma individual. Las ecuaciones (1.17) y (1.18) implican que cada componente está desacoplada del resto. Entonces, cada una de las componentes se puede describir según

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1.20)$$

donde U representará cada una de las componentes. Esto supone la resolución escalar de cada una de las componentes. Sin embargo, no todas las soluciones a las ecuaciones escalares son válidas, sino que la solución vectorial general tiene que cumplir las restricciones dadas por las ecuaciones (1.12) y (1.13).

De las infinitas soluciones posibles, hay algunos casos especialmente sencillos que con mucha frecuencia se presentan en la práctica de forma al menos aproximada. Estudiaremos algunos de los casos de mayor interés.

Ondas esféricas escalares

Sea una fuente que emite por igual en todas las direcciones. Cada una de las componentes del campo que se propaga tiene simetría radial. Esto significa que $V(\mathbf{r}, t) = V(r, t)$, donde $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ y (x_0, y_0, z_0) es la posición de la fuente. Esto significa que el valor de V es el mismo sobre los puntos de una superficie esférica de radio r en un tiempo dado t .

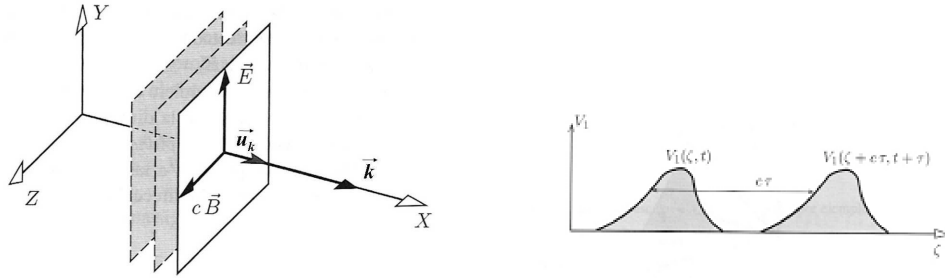


Figura 1.4: Frente de ondas plano y propagación en el tiempo.

Utilizando el operador $\nabla^2 = \Delta$ en coordenadas esféricas⁹ y eliminando las derivadas angulares θ y φ , que por simetría son nulas se obtiene la siguiente forma de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV(r, t)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(r, t),$$

que se puede simplificar como

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV(r, t)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [rV(r, t)].$$

La solución de esta ecuación tiene una forma del tipo

$$V(r, t) = \frac{V_1(r - ct)}{r} + \frac{V_2(r + ct)}{r}, \quad (1.21)$$

que representa dos ondas, una que se acerca hacia el origen, mientras que otra se aleja de éste. Una onda típica que emite en todas las direcciones es

$$u(r, t) = A_0 \frac{\cos(k \cdot r - \omega t)}{r}, \quad (1.22)$$

que se muestra en la Figura 1.3.

Ondas esféricas vectoriales

Las ondas esféricas escalares son una solución de la ecuación de ondas escalar. Sin embargo no es posible obtener una onda esférica vectorial, \mathbf{E} y \mathbf{B} , que cumpla simultáneamente las 6 ecuaciones de onda. Esto impone restricciones adicionales. Una solución que se aproxima a una onda esférica vectorial y que sí cumple todas las ecuaciones de Maxwell se verá en el caso de emisión de radiación electromagnética por un dipolo (sección 4.3.1).

Ondas planas vectoriales

Para un instante dado, las *ondas planas* son aquellas para las cuales el campo eléctrico toma el mismo valor sobre superficies que son planos, Figura 1.4. Es decir, para $t = t_0$ se cumple que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t). \quad (1.23)$$

El campo eléctrico es constante en los planos definidos por

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \zeta, \quad (1.24)$$

⁹ info sobre coordenadas esféricas: http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_esféricas

donde al vector constante \mathbf{k} se le llama *vector de ondas*. Al variar ζ se obtiene una familia de planos, perpendiculares a \mathbf{k} , en los cuales el campo \mathbf{E} será constante. Haciendo el cambio de variables en la ecuación $\mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\zeta, t)$ se obtiene que la ecuación de ondas resulta

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial t^2}. \quad (1.25)$$

Haciendo el siguiente cambio de variables, $\zeta - ct = p$ y $\zeta + ct = q$, entonces (1.25) tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial p \partial q} = 0,$$

cuya solución general resulta

$$\mathbf{E}(\zeta, t) = \mathbf{E}_1(\zeta - ct) + \mathbf{E}_2(\zeta + ct), \quad (1.26)$$

siendo \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 dos funciones arbitrarias cualesquiera, con la única condición que deben depender de ζ y t a través de los argumentos $(\zeta - ct)$ y $(\zeta + ct)$. Esta solución representa dos ondas, una viajando en una cierta dirección dada por \mathbf{k} y otra onda en la misma dirección pero en sentido contrario.

Las ondas planas, estrictamente hablando, no son físicamente realizables pues deben tener una duración y un tamaño infinito y por ello, como veremos, energía infinita. No obstante, en muchos casos se pueden obtener de forma aproximada, para una región de interés. Por ejemplo, se pueden obtener a partir de ondas esféricas, siempre que el radio de curvatura de la onda sea muy grande, Figura 1.5a. También hay otros medios para obtener ondas planas, como es mediante la colimación de un haz divergente utilizando una lente convergente (o de un haz convergente con una lente divergente), Figura 1.5b.

La importancia de las ondas planas radica en que cualquier onda real no plana se puede expresar como superposición de ondas planas de diferentes direcciones y amplitudes mediante el correspondiente análisis de Fourier. Profundizaremos en esta idea al final de este tema y también en Capítulo 13 “**DIFFRACCIÓN: FUNDAMENTOS**”.

ONDAS ARMÓNICAS

Entre las soluciones particulares que se pueden encontrar a la ecuación de ondas vectorial están las ondas armónicas, también llamadas *monocromáticas*. Cada una de las componentes del campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ de las ondas armónicas se puede describir como $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\cos(\omega t)$, es decir, componente a componente

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= A_x(\mathbf{r}) \cos[g_x(\mathbf{r}) - \omega t], \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= A_y(\mathbf{r}) \cos[g_y(\mathbf{r}) - \omega t], \\ E_z(\mathbf{r}, t) &= A_z(\mathbf{r}) \cos[g_z(\mathbf{r}) - \omega t]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Por consiguiente, una onda armónica es una solución particular que tiene toda la dependencia temporal en una única frecuencia, $\cos(\omega t)$. Las otras funciones (A_i, g_i) son funciones de la posición, pero no del tiempo. La frecuencia angular se relaciona con la frecuencia y con el período de la onda según

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} (\text{rad/s}). \quad (1.28)$$

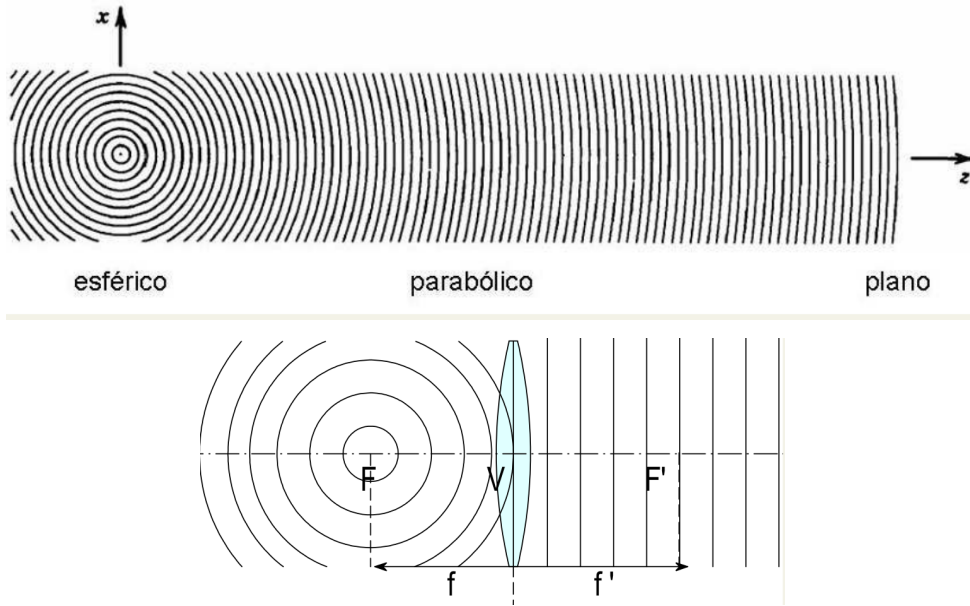


Figura 1.5: (a) Generación de ondas planas a partir de ondas esféricas cuando la distancia de observación es muy grande. (b) Generación de ondas planas a partir de ondas esféricas utilizando una lente. El punto generador de las ondas esféricas se tiene que localizar en el foco objeto.

Las componentes $A_x(\mathbf{r})$, $A_y(\mathbf{r})$, $A_z(\mathbf{r})$ son las *amplitudes* de cada una de las componentes de la onda y que se diferencian de $g_x(\mathbf{r})$, $g_y(\mathbf{r})$ y $g_z(\mathbf{r})$ por tener una variabilidad en \mathbf{r} mucho más lenta. El argumento del coseno es lo que se llama *fase* de la onda. Frecuentemente se cumple que $g_x(\mathbf{r}) = g_y(\mathbf{r}) = g_z(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$. A estos medios se les denomina isótropos y son los que consideraremos en el curso.

Por la naturaleza de su dependencia temporal, esta onda se extiende en el tiempo desde $-\infty$ a ∞ ; si restringimos su duración, ya no se puede considerar armónica ni tiene la expresión expuesta. Las ondas no armónicas las desarrollaremos en el Capítulo 10 “PULSOS DE LUZ”.

REPRESENTACIÓN COMPLEJA

Los campos electromagnéticos son campos reales, en el sentido de que se utilizan funciones reales para su descripción. Frecuentemente vamos a utilizar las ondas armónicas planas que utilizan funciones coseno (y seno). A la hora de realizar cálculos es bastante más sencillo (aunque no imprescindible) utilizar una *representación compleja*¹⁰ de los campos electromagnéticos. De modo que, *para simplificar los cálculos*, se escribe el coseno como la parte real de una exponencial compleja $e^{ia} = \cos a + i \sin a$. Esta expresión es útil para no arrastrar cosenos y senos por los cálculos. Como hemos visto, frecuentemente se utilizan derivadas, y la derivada del coseno es el seno. Entonces en las ecuaciones se suelen tener sumas de senos y cosenos que son un engorro. La representación con exponenciales complejas tiene la ventaja de que su derivada es ella misma y son más sencillos los cálculos. Escribamos de nuevo la definición del campo eléctrico como

$$E_j = \Re \left\{ A_j(\mathbf{r}) e^{+ig_j(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} \right\},$$

¹⁰ info sobre números complejos: http://es.wikipedia.org/wiki/Número_complejo

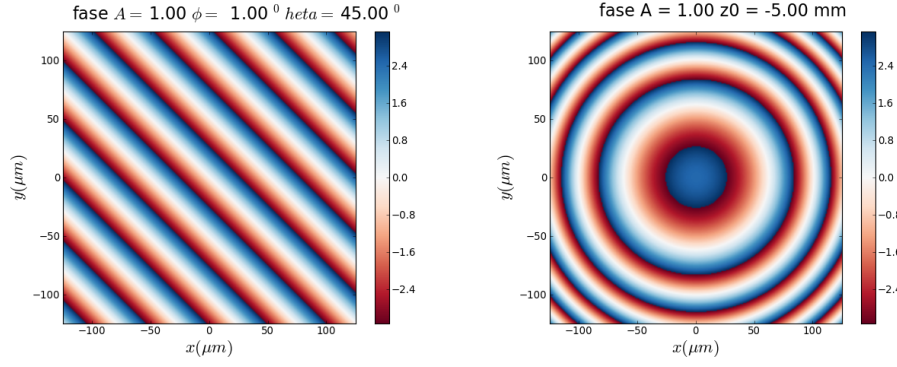


Figura 1.6: Fase de una onda plana y una onda esférica. Las variaciones en los colores significan variaciones en radianes.

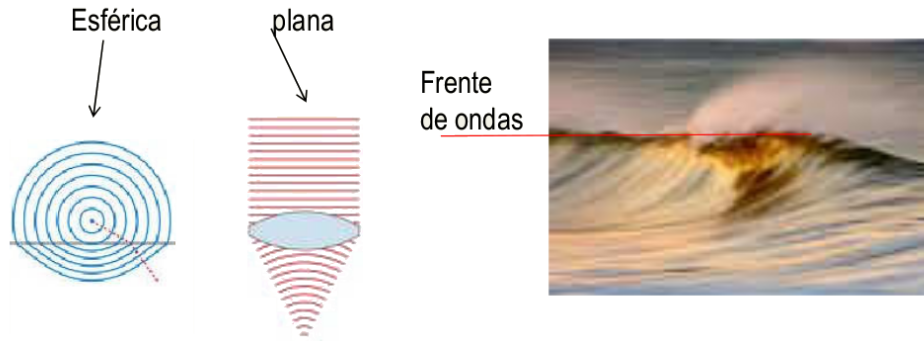


Figura 1.7: Frentes de onda para dos tiempos distintos.

donde \Re es la parte real y j representa a x , y y z . Hay que tener en cuenta que utilizamos el convenio de poner la parte temporal con signo negativo, $e^{-i\omega t}$, es decir, con el signo menos en el exponente¹¹. En todo lo que sigue prescindiremos de escribir $\Re \{ \dots \}$ y se habrá de entender que las amplitudes $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ son vectores complejos, de los cuales *sólo la parte real tiene significado físico* (susceptible de medir experimentalmente). La expresión de la onda queda entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{i[g_x(\mathbf{r}) - \omega t]}. \quad (1.29)$$

Esta forma de representación compleja es útil y se puede utilizar siempre que se realicen operaciones lineales, tales como sumas, integrales, derivadas, etc. Esto es debido a que al realizar operaciones lineales la parte real de la suma es la suma de las partes reales. No obstante cuando se realizan operaciones no lineales (como multiplicaciones de campos) no es posible utilizar la representación compleja de una forma tan sencilla.

En la Figura 1.6 se muestran, a modo de ejemplo, la fase de una onda plana y una onda esférica en un plano determinado.

FRENTES DE ONDA

En los medios isótropos la fase de la onda armónica resulta

$$\phi(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}) - \omega t. \quad (1.30)$$

¹¹ Este convenio es el más extendido en Física, pero no toda la bibliografía lo sigue.

Para un tiempo fijo t_0 un *frente de ondas* es el conjunto de puntos del espacio donde la onda tiene la misma fase.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) - \omega t_0 &= \phi_0, \\ g(\mathbf{r}) - \omega t_0 - \phi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ésta es la ecuación de un sistema de superficies, cada cual definida por la constante ϕ_0 . Si ahora permitimos la variación del tiempo concluiremos que los frentes de ondas cambian con el tiempo

$$g(\mathbf{r}) + \phi_0 = \omega t_1.$$

Los frentes de onda se propagan (ver Figura 1.7), lo mismo que se propaga la perturbación, en el espacio y en el tiempo.

ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

Las ondas armónicas, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, también son de gran interés porque la parte temporal y espacial se multiplican, por lo que las componentes espacial y temporal de las ecuaciones de Maxwell son separables para este tipo de ondas. Introduciendo la definición compleja de las ondas armónicas obtenemos que las derivadas temporales y espaciales resultan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= [\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r})] e^{-i\omega t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= [\nabla \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r})] e^{-i\omega t}, \\ \partial \mathbf{E} / \partial t &= -i\omega \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ \partial \mathbf{B} / \partial t &= -i\omega \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

y entonces la ecuación de ondas del campo eléctrico y la inducción magnética se convierten en

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

que son dos ecuaciones de Helmholtz¹² en la que únicamente se incluye la parte del campo con dependencia espacial.

ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Si se impone tanto la dependencia armónica temporal como la dependencia espacial en forma de onda plana, las ondas armónicas planas se describen como¹³

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},} \quad (1.33)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ es el vector de ondas, que define la dirección de propagación de la fase. En el caso de coordenadas esféricas, el vector de ondas se puede describir como

$$\mathbf{k} = k(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta). \quad (1.34)$$

¹² info sobre Helmholtz <http://es.wikipedia.org/wiki/Helmholtz>

¹³ este tipo de ondas se utilizará muy frecuentemente.

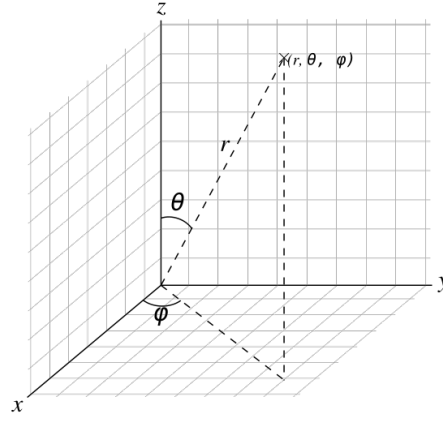


Figura 1.8: Representación de las coordenadas esféricas.

Si el vector de ondas está contenido en el plano xz entonces $\varphi = 0$ y $\mathbf{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, Figura 1.8. El caso más sencillo para los cálculos, y que utilizaremos siempre que sea posible es que el haz se propague en la dirección z ($\varphi = 0, \theta = 0$). Entonces $\mathbf{k} = k(0, 0, 1)$ y el campo eléctrico resulta $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$.

Veamos si este tipo de onda es solución de las ecuaciones de Maxwell y, por ello, puede describir una onda electromagnética. Como vemos, toda la dependencia espacio-temporal está en la exponencial compleja, pues asumimos que \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 son vectores complejos constantes. Introduciendo esta solución en las ecuaciones de Maxwell para el vacío, (1.12-1.15), obtenemos que las ecuaciones diferenciales se pueden resolver de una forma muy sencilla

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0. \quad (1.38)$$

La importancia de estas ecuaciones estriba en que se han resuelto todas las derivadas, tanto espaciales como temporales de forma explícita transformando el problema a un simple cálculo de análisis vectorial.

Esto significa que (1.33) es una solución válida de las ecuaciones de Maxwell siempre que se cumplan las restricciones proporcionadas por (1.35-1.38). Es de notar que el cálculo es exacto, por cuanto no hemos realizado ninguna aproximación para ello. Aunque sea una solución muy sencilla, presenta todas las características necesarias para poder explicar la mayor parte de los fenómenos ópticos. Por ello, a la largo del curso utilizaremos las ondas armónicas planas como onda incidente en la mayor parte de problemas. El cómo generalizar estas soluciones al caso de ondas no-armónicas y no-planas, se abordará en los Capítulos 10 “PULSOS DE LUZ” y 13 “DIFRACCIÓN: FUNDAMENTOS” respectivamente. También estudiaremos ondas donde los parámetros no son fijos, sino que tienen cierta parte aleatoria en el Capítulo 16 “COHERENCIA”.

Otra forma de escribir las ondas armónicas planas es la siguiente

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A \mathbf{v} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)], \quad (1.39)$$

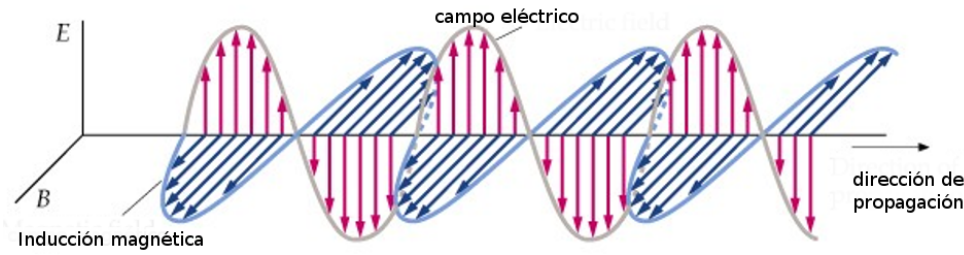
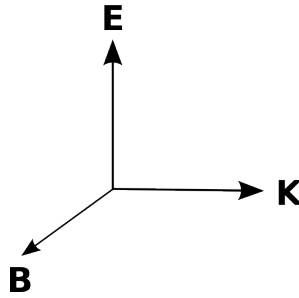


Figura 1.9: Propagación transversal del campo electromagnético.

Figura 1.10: Las direcciones E , B y k forman un triedro.

donde la amplitud del campo eléctrico $E_0 = A \mathbf{v}$ la hemos dividido en dos partes, una constante real A relacionada con la energía de la onda incidente, y un vector \mathbf{v} de módulo unidad relacionado con la dirección del campo eléctrico (polarización). La fase inicial φ_0 de la onda (en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $t = 0$) a veces es relevante. Veamos ahora las principales características de las ondas armónicas planas.

Transversalidad de las ondas armónicas planas

Los campos son ortogonales entre sí, y cada uno de ellos al vector de ondas, como se representa en la Figura 1.10. Se forma, pues, un triedro con los vectores E, B, k de forma que $E \wedge B$ está en la dirección de k .

recordar: ondas
armónicas planas
 $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$

Módulo del vector de ondas: definición de longitud de onda

Si combinamos las dos últimas ecuaciones (1.37) y (1.38),

$$\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} \right),$$

y se usa la relación $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ obtenemos

$$\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega^2} [\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})].$$

El primer término es nulo, puesto que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Entonces se obtiene que

$$\mathbf{E} = \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 \mathbf{E} k^2 = \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 k^2 \mathbf{E}.$$

Por consiguiente, obtenemos cuánto vale el módulo de k

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (1.40)$$

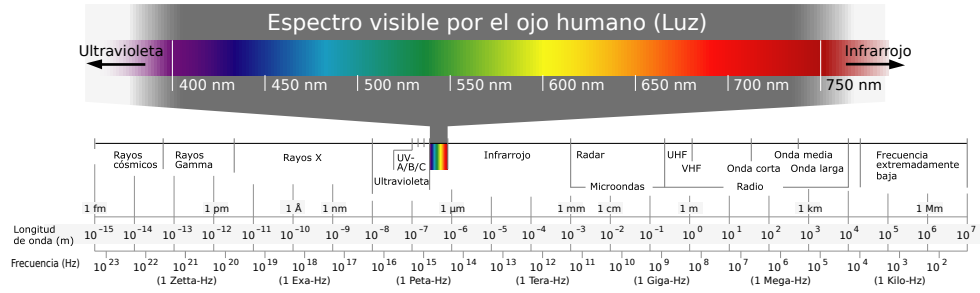


Figura 1.11: Espectro de las ondas electromagnéticas. Solo una pequeña parte, de longitudes de onda de 380 nm a 750 nm es el espectro visible, es decir, es captado por el ojo humano.

definición de longitud de onda

Esto nos permite definir, un nuevo parámetro, la longitud de onda

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.41)$$

Como consecuencia de esta relación, el vector de ondas \mathbf{k} no presenta 3 valores independientes, sino que se cumple (1.40) $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Entonces, se puede escribir como

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}). \quad (1.42)$$

También tenemos la definición $\omega = 2\pi\nu$, donde ν es la frecuencia de la onda. La condición $k = \omega/c$ se convierte en

$$\lambda\nu = c, \quad (1.43)$$

y permite clasificar las ondas también por su longitud de onda, puesto que conocemos la relación con la frecuencia. Lo que tradicionalmente llamamos *luz*, es decir, aquella parte del espectro electromagnético que excita el ojo humano, presenta una longitud de onda aproximadamente

$$380 \text{ nm} < \lambda < 750 \text{ nm}, \quad (1.44)$$

aunque todas las fórmulas desarrolladas valen para cualquier campo electromagnético (radio, infrarrojo, visible, ultravioletas, rayos x, etc.).¹⁴

VELOCIDAD DE FASE

Ondas armónicas planas

Como hemos visto en (1.30), los frentes de onda vienen dados por los puntos cuya fase es constante. Para el caso de ondas armónicas, esta fase se describe como

$$\phi(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}) - \omega t = cte,$$

¹⁴ la percepción del espectro visible por el ojo da lugar a los colores espectrales. La parametrización de la percepción visual se estudia en colorimetría.

mientras que para de una onda armónica plana los frentes de onda se simplifican

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t.$$

Para obtener la velocidad de fase nos situamos en, por ejemplo, un máximo y vemos cómo avanza la propagarse. La posición de un máximo de la fase se puede obtener a partir de

$$d\phi = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt = 0.$$

Entonces la velocidad de fase resulta

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (1.45)$$

Es decir, la velocidad de desplazamiento de los planos de igual fase o *velocidad de la fase* es precisamente c .

Ondas armónicas no planas

En el caso de una onda armónica general, la fase resulta $\phi = g(\mathbf{r}) - \omega t$ por lo que las superficies definidas por la condición $g(\mathbf{r}) = cte$ (para t fijo) son los frentes de onda. Como hemos visto, los frentes de onda se mueven con una velocidad que viene determinada por la condición de constancia de la fase. Para calcularla se impone la condición

$$d\phi(\mathbf{r}, t) = \nabla g(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \omega dt = 0,$$

que con la condición $d\mathbf{r} = \mathbf{u}_r dl$ obtenemos

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{\mathbf{u}_r \cdot \nabla g(\mathbf{r})},$$

y tomando la dirección perpendicular a la superficie de onda, es decir la de $\nabla g(\mathbf{r})$, se tendrá el valor máximo del denominador y por consiguiente

$$v_{fase} = \left(\frac{dl}{dt} \right)_{\min} = \frac{\omega}{|\nabla g(\mathbf{r})|}. \quad (1.46)$$

Información contenida en el campo eléctrico

En casi todos los casos estudiados en la Óptica nuestro interés final será conocer el campo eléctrico \mathbf{E} . Esto es así porque en el campo \mathbf{E} está contenida toda la información necesaria, tanto la amplitud y dirección del campo eléctrico como la dirección del vector \mathbf{k} . Una onda armónica plana queda determinada por su frecuencia, ω , su dirección, \mathbf{k} y su amplitud \mathbf{E}_0 . Los frentes de onda se desplazan en la dirección de \mathbf{k} a velocidad c . En cuanto al campo magnético, está completamente determinado por el campo eléctrico, a través de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Por ejemplo, para el caso de ondas planas, se obtiene

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 \quad (1.47)$$

de forma que la dirección del campo \mathbf{B} es perpendicular tanto a \mathbf{E} como a \mathbf{k} y el módulo de la inducción magnética es

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_0|. \quad (1.48)$$

COHERENCIA

En estas soluciones sencillas que hemos determinado, onda esférica, onda plana, onda armónica, etc. hemos asumido que el campo electromagnético está perfectamente determinado. Normalmente no es así, sino que los parámetros que caracterizan la luz (amplitud, fase, polarización) suelen tener en la práctica un comportamiento aleatorio (estocástico). Esto complica enormemente el estudio de la luz así que en buena parte de la asignatura asumiremos que la luz se comporta de forma determinista. El estudio del campo electromagnético cuando sus propiedades fluctúan aleatoriamente en el tiempo se verá en el Capítulo 16 “COHERENCIA”.

PROPIEDADES DE LA LUZ

Finalmente, podemos resumir las propiedades que tiene la luz en las siguientes:

- Amplitud: Relacionado con la intensidad y la energía.
- Velocidad: $c = \omega/k$.
- Fase: Luz como fenómeno ondulatorio. Relacionado con la dirección (vector de ondas).
- Frecuencia: Relacionado con la longitud de onda (físico) y el color (visual).
- Polarización: La luz es una onda vectorial. Es la dirección del vector \mathbf{E} .
- Coherencia: Capacidad de interferir consigo mismo (no hemos visto).

CONCLUSIONES

- Existen diversos modelos y aproximaciones para describir la luz. En este curso utilizaremos principalmente el modelo electromagnético. En este modelo, la luz es una onda electromagnética que cumple las ecuaciones de Maxwell, que es un conjunto de 8 ecuaciones diferenciales que relacionan el campo eléctrico y magnético con las cargas y corrientes eléctricas.
- La luz es generada por cargas y corrientes aceleradas. La luz se puede propagar en el vacío, no necesitando un soporte material para ello. La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal.
- Cuando la luz se propaga por la materia, interacciona con ésta, alterando la dinámica de las cargas.
- Las ecuaciones de Maxwell son, por lo general, muy difíciles de resolver. Una solución exacta y sencilla, que utilizaremos durante todo el curso, es la onda armónica plana.
- Las ecuaciones de Maxwell son lineales en los campos. Se pueden construir de forma sencilla nuevas ondas planas como suma de ondas armónicas planas.

- En las ondas planas, los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación.
- Propiedades de la luz: amplitud, fase, frecuencia, polarización, coherencia.
- El rango de longitudes de onda de la luz visible se encuentra entre 380 nm y 750 nm aprox.
- Existen otro tipo de soluciones aproximadas como son las ondas esféricas y los haces de Gauss, que muchas veces se utilizan para resolver problemas.
- Para problemas complejos, se suelen utilizar aproximaciones numéricas.

COMPLEMENTO: OTROS TIPOS DE ONDAS

Las ondas esféricas y planas que hemos estudiado son las más sencillas que podemos analizar de forma teórica. No obstante, no son los únicos tipos de onda que se utilizan comúnmente en Óptica. Otra técnica para obtener haces más reales (recordamos que las ondas planas no son físicamente realizables) es a partir de la solución de la ecuación de Helmholtz (1.32), $\nabla^2 U(r) + k^2 U(r) = 0$, donde U es cualquiera de las componentes de los campos \mathbf{E} o \mathbf{B} . Introduciendo una solución inicial

$$U(r) = A(r) \exp(ikz), \quad (1.49)$$

asumiendo que la variación de $A(r)$ es muy lenta longitudinalmente (eje de propagación z)

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right), \quad (1.50)$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$, y resolviendo las ecuaciones diferenciales se obtiene una distribución de campo

$$U(r) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)}\right) \exp\left(ikz + ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - i\zeta(z)\right), \quad (1.51)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \\ R(z) &= z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right] \\ \omega_0^2 &= z_0 \lambda / \pi \\ \zeta(z) &= \arctan^{-1}(z/z_0) \end{aligned}$$

Este tipo de haces describe mucho mejor los haces láser. Adicionalmente, se pueden obtener otro tipo de soluciones que también se suelen dar en los láseres, como los haces Hermite-Gauss, basándonos en la ecuación de Helmholtz, Figura 1.12.

Otros tipos de haces también interesantes son los vórtices, que tienen un cierto momento angular y se utilizan en nanofotónica para mover y rotar partículas minúsculas, Figura 1.13.

COMPLEMENTO: MÉTODOS NUMÉRICOS

Con el amplio uso de la computación, frecuentemente se utiliza técnicas de cálculo numérico para conocer cómo se propagan los haces a partir de las ecuaciones de

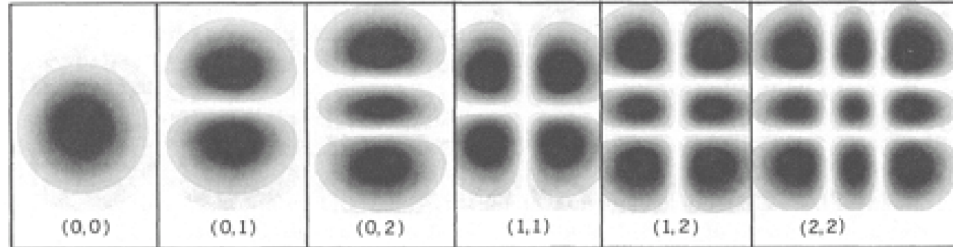


Figura 1.12: Distribución de intensidad de varios haces Hermite-Gauss de bajo orden en el plano transversal. El orden $(0,0)$ se corresponde con el haz de Gauss.

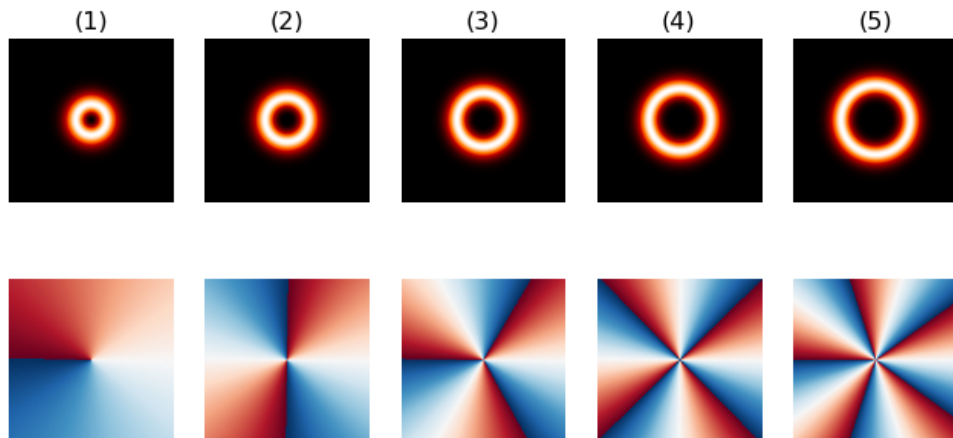


Figura 1.13: Varios vórtices que aplican al haz un cierto momento angular.

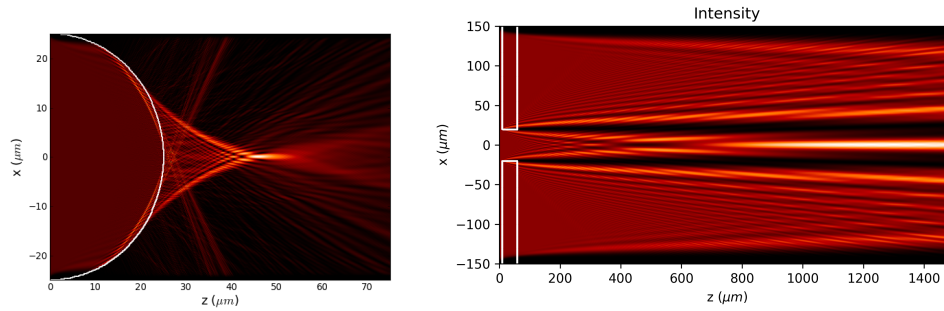


Figura 1.14: Ejemplo de propagación basada en BPM para una lente y una rendija en un vidrio.

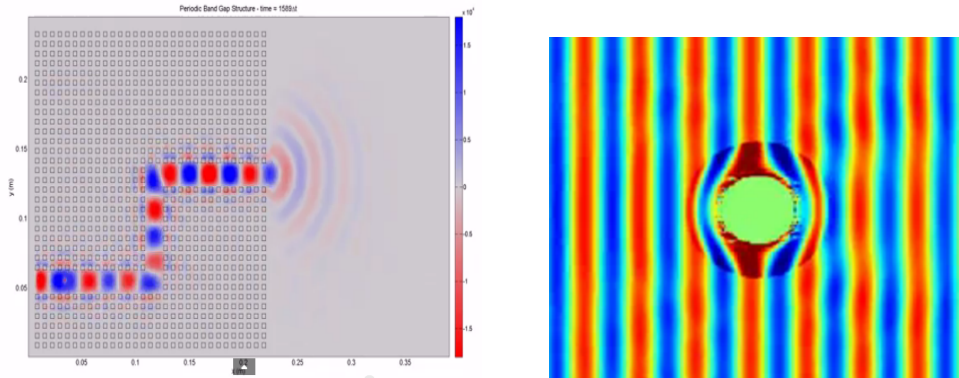


Figura 1.15: Ejemplo de propagación basada en FDTD de un cristal fotónico (dieléctrico donde las esferas son huecas) y una simulación de invisibilidad basada en metamateriales (cloaking). Hay dos vídeos en <http://www.youtube.com/watch?v=gZkFVco4kL4> y <http://www.youtube.com/watch?v=8M0I7RZO4Hw>.

Maxwell inhomogéneas (1.1-1.4). Existen numerosas técnicas tanto para desarrollo escalar como vectorial. Entre las más conocidas están el Beam Propagation Method (BPM¹⁵), y Finite Difference Time Domain (FDTD¹⁶).

En la Figura 1.14 se muestra un ejemplo de propagación a través de una semiesfera y rendija mediante la técnica de BPM. Se observa el proceso de focalización, que es similar al predicho en la Óptica Geométrica. También se observa la cáustica, que es el borde de distribución de luz hasta llegar al foco. No obstante, también aparecen diferencias; en primer lugar el foco no es puntual, sino que tiene un tamaño finito. También aparecen una serie de máximos y mínimos debidos a los efectos difractivos (ya veremos con detalle).

Por otro lado en la Figura 1.15 se muestran dos ejemplos, basados en FDTD, uno de una estructura fotónica, para reconducir la luz mediante un circuito óptico y otro en el que se diseña un metamaterial¹⁷ para producir invisibilidad de una esfera.

Otro ejemplo interesante es el que se muestra en la Figura 1.16a donde se estudian las resonancias electromagnéticas en una cavidad mediante la técnica RCWA. Se puede observar que la penetración de la onda (que viene de abajo hacia arriba) y los modos resonantes dependen del estado de polarización de la onda incidente. Finalmente, en la Figura 1.16b se muestra un ejemplo de los modos de propagación en una fibra óptica, calculados mediante BPM.

¹⁵ info sobre BPM: http://en.wikipedia.org/wiki/Beam_Propagation_Method

¹⁶ info sobre FDTD http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_time_domain

¹⁷ <http://en.wikipedia.org/wiki/Metamaterial>

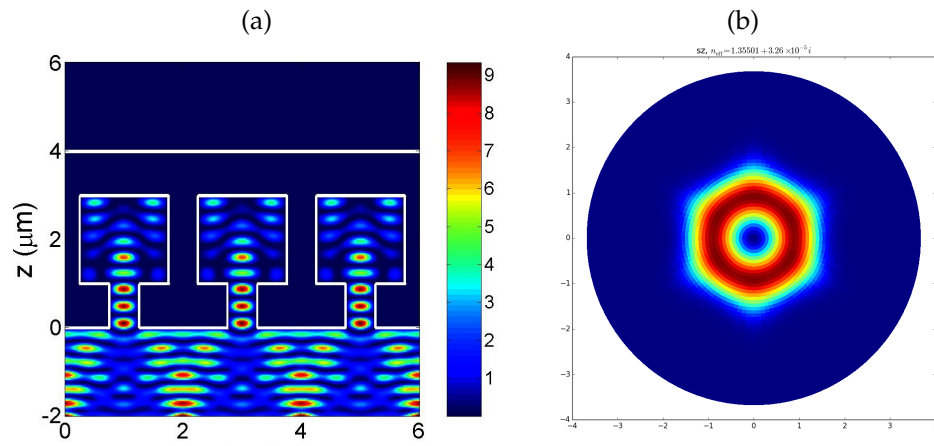


Figura 1.16: (a) Campo electromagnético TE que entra en una cavidad metálica para distintas polarizaciones, basado en RCWA. (b) Ejemplo de propagación en una fibra óptica, mediante BPM.

ENERGÍA DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Una de las principales características de la luz es que transporta energía. Estudiaremos que el vector de Poynting, magnitud derivada de las ecuaciones de Maxwell, permite determinar la cantidad de energía que transportan las ondas. Debido a que es fuertemente fluctuante en el tiempo, analizaremos también su promedio temporal.

Índice

2.1	La luz como fuente de energía	23
2.2	Vector de Poynting	24
2.3	Vector de Poynting para una onda armónica plana	25
2.4	Promedio temporal del vector de Poynting	26

Objetivos

- Determinar la energía que transportan las ondas electromagnéticas.

Referencias generales:

- Ryer A. "Light measurement handbook", Citeseer (1997).
- Rea M.S. and others, "Lighting handbook", Illuminating Engineering Society of North America (1995).
- Winston R., Miñano J.C., Benitez, P., "Nonimaging optics", Academic Press (2005).
- Chaves, J., "Introduction to nonimaging optics", CRC Press (2008).

LA LUZ COMO FUENTE DE ENERGÍA

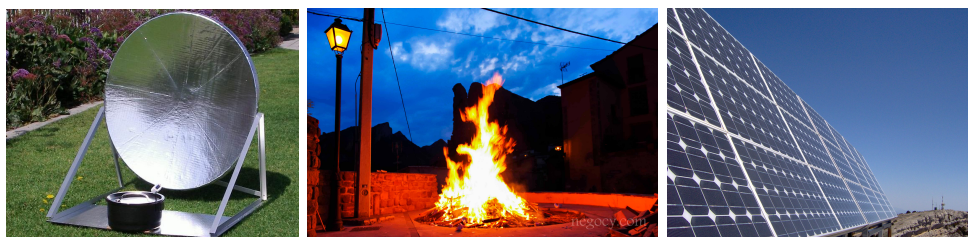


Figura 2.1: Tres ejemplos donde se muestra que la luz es una fuente de energía: a) cocina solar, b) el fuego, c) paneles fotovoltaicos.

Es de sobra conocido que la luz transporta energía, Figura 2.1. El sol, además de darnos luz para poder ver, se utiliza para producir energía eléctrica. La radiación solar se transforma en calor que permite mover una turbina (energía solar térmica) y también se transforma en electricidad (energía solar fotovoltaica) mediante paneles solares. En este tema analizaremos cómo, a partir de las ecuaciones de Maxwell,

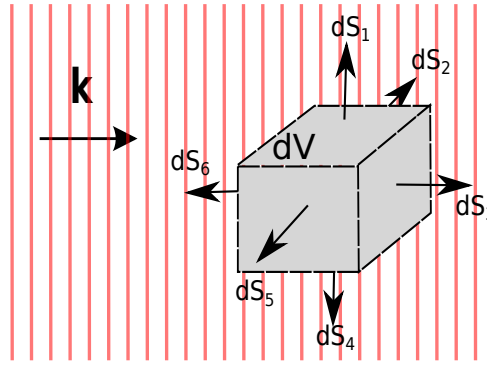


Figura 2.2: Elemento de volumen infinitesimal y áreas asociadas para el cálculo de las integrales.

podemos obtener parámetros que nos permitan medir la cantidad de energía que transporta la radiación electromagnética.¹

VECTOR DE POYNTING

Según la teoría electromagnética, la energía de un campo eléctrico \mathbf{E} , contenida en un elemento de volumen dV es

$$dW_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 dV.$$

De igual forma, en este mismo volumen, la inducción magnética \mathbf{B} también transporta una energía, que resulta ser

$$dW_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 dV.$$

Como consecuencia, la energía total, dW , localizada en dicho elemento de volumen es la suma de ambas,

$$dW = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV. \quad (2.1)$$

Para ver cómo varía la energía con el tiempo dentro de un volumen V , bastará sumar la energía electromagnética en cada elemento de volumen y estudiar su derivada temporal

$$\frac{dW_T}{dt} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV.$$

El término dentro de la integral se resuelve como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) = \epsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

¹ info sobre la radiación solar: http://es.wikipedia.org/wiki/Radiación_solar
info sobre la energía solar: http://es.wikipedia.org/wiki/Energía_solar

Para simplificar este resultado consideraremos las ecuaciones de Maxwell generales (1.3) y (1.4)

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}$$

la relación vectorial $\mathbf{E}(\nabla \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\nabla(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$ y el teorema de la divergencia de Gauss²,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.2)$$

donde $ds = ds_1, ds_2, ds_3, ds_4, ds_5, ds_6$, según Figura 2.2, y \mathbf{n} es el vector normal a la superficie que apunta hacia el exterior del volumen V . Con todo ello, obtenemos la siguiente relación

$$-\int_V \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.3)$$

donde \mathbf{j} son las corrientes. El término de la izquierda es variación de la de energía almacenada en un volumen V . Lo principal de esta ecuación es que la parte de la derecha no presenta la dependencia temporal de los campos. Esta ecuación se denomina *teorema de Poynting*³.

El primer término de la derecha indica que parte de esta energía se transforma en calor debido al efecto Joule. El segundo término indica que parte de la energía electromagnética almacenada se escapa a través de las paredes que rodean volumen. Esto nos da idea de que una onda transporta energía en su propagación. Es necesario cuantificar la energía que una onda transporta. Para ello se define el *vector de Poynting*

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

definición del
vector de Poynting

Las unidades del vector de Poynting son $[\mathbf{S}] = W/m^2$. El vector de Poynting describe un flujo de energía (energía por unidad de tiempo y superficie).

VECTOR DE POYNTING PARA UNA ONDA ARMÓNICA PLANA

Para calcular el vector de Poynting no se puede utilizar la representación compleja, porque hay un producto de campos, que es una operación no lineal (la parte real del producto no es el producto de las partes reales). Un vector de Poynting imaginario es una señal de que hemos cometido este error. En adelante, el subíndice $_R$ subrayará el uso de la representación real. Para el caso de ondas armónicas planas, $\mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ y $\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) = B_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, entonces obtenemos, utilizando las ecuaciones de Maxwell, que $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) / \omega$ y sustituyendo resulta

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_R \wedge \left(\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_R \right).$$

² info sobre el teorema de la divergencia: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia

³ info sobre J.J. Poynting: http://es.wikipedia.org/wiki/John_Henry_Poynting

Ahora bien, utilizando la relación $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ esta ecuación se simplifica

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\mathbf{k}}{\omega} \mathbf{E}_R^2 - \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_R (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_R) \right],$$

y considerando que una de las ecuaciones de Maxwell indica que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_R = 0$ para ondas planas, obtenemos que el vector de Poynting resulta

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{E}_R^2 \mathbf{k} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_R^2 \mathbf{u}_k.$$

El vector de Poynting apunta en la dirección del vector de ondas. Por lo tanto, para una onda armónica plana, fase y energía se propagan en la dirección del vector de ondas. La energía es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. Esto es muy importante, porque nos indica que a la hora de calcular la energía nos es suficiente conocer el campo eléctrico \mathbf{E} y el vector de ondas \mathbf{k} para el caso de una onda armónica plana. Es por ello que normalmente los campos magnéticos no se utilizarán en los cálculos ópticos.

PROMEDIO TEMPORAL DEL VECTOR DE POYNTING

El vector de Poynting (2.4) tiene una dependencia temporal fuertemente fluctuante, del orden de la frecuencia de luz $\nu \simeq 10^{14} \text{ Hz}$. En la práctica, ningún detector tiene resolución temporal para medir dichas oscilaciones por lo que solamente es útil conocer los promedios temporales del vector de Poynting, puesto que son los que realmente se van a poder medir experimentalmente. En lugar de tener que determinar el vector de Poynting "instantáneo", realmente en lo que estamos interesados es en el promedio temporal del vector de Poynting, que definimos como

$$\langle \mathbf{S} \rangle(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.5)$$

donde definimos $\langle \cdot \rangle$ como el promedio temporal y Δt representa el intervalo sobre el que se promedia. Para hacerse una idea un tiempo de respuesta correspondiente a un detector muy rápido, sería del orden del nanosegundo, $\Delta t \simeq 10^{-9} \text{ s}$. Para ello consideremos de nuevo la expresión general para el vector de Poynting (2.4), $\mathbf{S} = (\mathbf{E}_R \wedge \mathbf{B}_R) / \mu_0$, y calculemos los valores de dichos campos, haciendo uso de la representación real, puesto que hay un producto de campos,

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}], \quad \mathbf{B}_R = \frac{1}{2} [\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}].$$

Entonces el vector de Poynting instantáneo resulta

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0) + \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0 e^{-i2\omega t} + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0^* e^{i2\omega t}),$$

donde, para simplificar la notación se ha eliminado la dependencia espacial, que está implícita, $\mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. El promedio temporal del vector de Poynting se resuelve con cuatro integrales. El primer paréntesis no depende explícitamente del tiempo. Sin embargo, el segundo paréntesis es despreciable para rangos ópticos

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{\pm i2\omega t'} = \frac{\sin[2\omega(t + \Delta t)]}{2\omega \Delta t},$$

pues Δt nunca es suficientemente pequeño como para que estas integrales sean relevantes: el denominador vale como mínimo 10^5 ya que $\omega\Delta t \simeq 10^{14}\Delta t \simeq 10^5$ (con $\Delta t \simeq 10^{-9}s$). Es por ello que el promedio temporal de este promedio resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0). \quad (2.6)$$

De esta forma el promedio temporal del vector de Poynting para ondas armónicas resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \}, \quad (2.7)$$

onda armónica

pues $2\Re(a) = a + a^*$. Esta fórmula es de utilidad puesto que se puede utilizar la representación compleja, aun cuando estamos tratando con operaciones no lineales. Es importante recalcar que esto *sólo vale para ondas armónicas*. Para otro tipo de ondas se debe utilizar la definición (2.4). Al particularizar la expresión hallada para la onda armónica plana

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \wedge \mathbf{B}_0^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\},$$

se obtiene

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k, \quad (2.8)$$

onda armónica plana

donde $|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*$. Vemos que

- La energía que se propaga con la onda electromagnética es proporcional a $|\mathbf{E}_0|^2$.
- La dirección de propagación en el vacío es la que lleva el vector \mathbf{k} .
- Para ondas armónicas planas, el promedio temporal del vector de Poynting es igual a la mitad del valor instantáneo.

El hecho de que la energía de las ondas electromagnéticas (parámetro físico observable mediante nuestro ojo, un fotodetector, o una cámara fotográfica) sea cuadrático con el campo es de transcendental importancia en Óptica, pues nos indica que pueden existir efectos interferenciales debido a los términos cruzados. Esto se verá en el Capítulo 11.

IRRADIANCIA El promedio temporal del vector de Poynting coincide con la magnitud *irradiancia* de la Óptica Geométrica. Como la irradiancia es una magnitud escalar, se define como el producto escalar entre el vector de Poynting y un vector unitario, \mathbf{n} , en la dirección de la superficie, Figura 2.3,

definición de irradiancia

$$Irradiancia \equiv \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

No obstante, en Óptica se suele utilizar de forma similar la definición de intensidad, como referencia a la energía observada en una superficie. En términos prácticos es la misma exceptuando que solo se considera el módulo al cuadrado de la intensidad

$$Intensidad \equiv |\mathbf{E}_0|^2. \quad (2.10)$$

Esta definición la utilizaremos frecuentemente, sobre todo en interferencias y difracción, teniendo la precaución de saber que no es exactamente la irradiancia, sino proporcional a ésta.

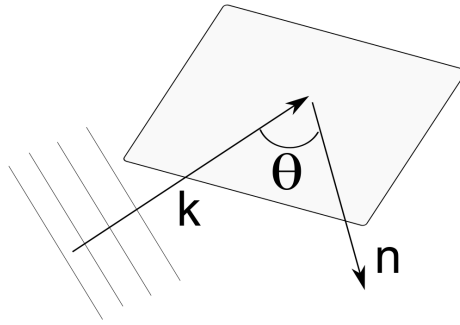


Figura 2.3: Cuando la normal a la superficie y el vector de Poynting no son paralelos entre si, la irradiancia disminuye. Esto explica por qué en invierno hace más frío que en verano y al atardecer en lugar del medio día

CONCLUSIONES

- El vector de Poynting cuantifica la energía que transporta una onda electromagnética; tiene unidades de flujo de energía W/m^2 . Tiene una dependencia temporal fuertemente fluctuante.
- Es más efectivo utilizar el promedio temporal.
- Otros parámetros de interés son la irradiancia y la intensidad luminosa.

Otra de las propiedades fundamentales de la luz, debida a su carácter vectorial, es el estado de polarización, que se define como la trayectoria del vector campo eléctrico en un plano normal al de propagación. Si la trayectoria está bien definida, se dice que el estado de polarización es puro. Para caracterizar la polarización, se definen diversos parámetros tales como su excentricidad o elipticidad. El formalismo de Jones permite la representación de estados puros mediante un vector complejo 2×1 . Los elementos o sistemas que modifican el estado de polarización se denominan polarizadores, y pueden ser polarizadores lineales, circulares, elípticos y retardadores. Dichos elementos polarizadores se pueden caracterizar a través de una matriz de polarización 2×2 .

Índice

3.1	Polarización en la vida cotidiana	30
3.2	Polarización de ondas armónicas planas	34
3.2.1	Elipse de polarización	34
3.3	Estados de polarización	36
3.3.1	Polarización lineal	36
3.3.2	Polarización circular	37
3.3.3	Polarización elíptica	37
3.3.4	Luz natural	37
3.4	Caracterización de los estados de polarización: representación de Jones	38
3.4.1	Bases de polarización	39
3.5	Elementos modificadores de la polarización: polarizadores . . .	40
3.5.1	Polarizador lineal	41
3.5.2	Rotación del polarizador	41
3.5.3	Polarizador circular	42
3.5.4	Retardadores lineales	42
3.5.5	Luz que atraviesa varios polarizadores consecutivamente	42
3.6	Ley de Malus	43
3.A	Complemento: Álgebra de polarización	44
3.B	Complemento: caracterización de la elipse de polarización . . .	45

Objetivos

- Conocer el fenómeno de la polarización
- Caracterizar los estados de polarización
- Conocer los elementos que modifican el estado de polarización.

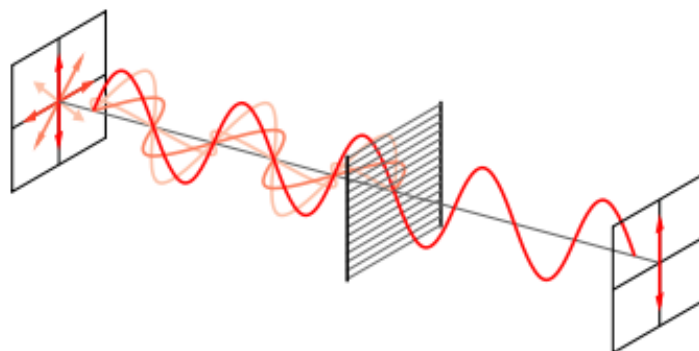


Figura 3.1: Funcionamiento de un polarizador lineal.

Referencias generales

- Born, M. and Wolf, E., "Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light", Cambridge university press (1999).
- Goldstein D. "Polarized Light, revised and expanded", CRC Press (2011).
- Scharf T. "Polarized light in liquid crystals and polymers", John Wiley & Sons (2007).

POLARIZACIÓN EN LA VIDA COTIDIANA

El ojo humano, es sensible a la energía de las ondas luminosas cuando la longitud de onda está en el rango del visible ($300 - 700 \text{ nm}$ aprox.). Por ello, el tema anterior nos ha sido intuitivo. Asimismo, debido a que existen células sensibles a distintas longitudes de onda, somos capaces de detectar colores que nos proporcionan una cierta información espectral. Por otra parte, nuestros ojos son insensibles a la dirección de vibración del campo eléctrico, por lo que no podemos distinguir otra propiedad de la luz que es la polarización. Es por ello que el descubrimiento de la polarización de la luz ha llevado un camino más lento.

Antes de entrar en un análisis matemático de la polarización a partir de las ecuaciones de Maxwell, veremos algunos efectos cotidianos observables de la polarización¹. Debido a que no podemos observar esta propiedad directamente, para detectar y usar la polarización se emplean polarizadores lineales. Estos elementos dejan pasar el campo eléctrico en una cierta dirección, denominada eje del polarizador y son capaces de absorber el campo eléctrico en la dirección perpendicular al eje del polarizador, Figura 3.1. En la vida ordinaria los polarizadores se encuentran en algunas gafas de Sol, en filtros para cámaras fotográficas, pantallas de ordenadores, televisores y móviles. También los reflejos sobre medios transparentes permiten polarizar la luz.

EL CIELO ESTÁ POLARIZADO La luz azul del cielo está parcialmente polarizada vibrando en mayor medida perpendicularmente al plano que contiene a la vez al Sol, a nosotros y al punto del cielo que miremos. Esto se puede determinar utilizando un elemento polarizador, como es un polarizador lineal y girándolo.

¹ <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/gioq/fenopt/index.htm>

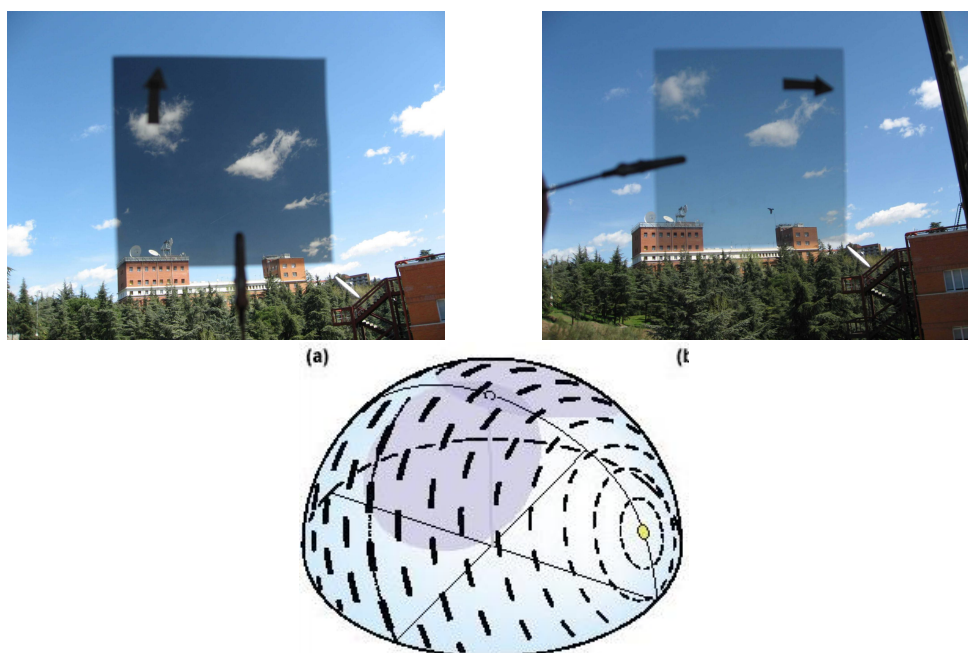


Figura 3.2: Demostración experimental de la polarización parcial del cielo. Al girar un polarizador lineal, la cantidad de luz que lo atraviesa varía. (abajo) El estado de polarización de la luz proveniente del cielo depende de la posición del sol. La luz está más polarizada a 90° del sol.

Si no se observa variación de intensidad la luz no está polarizada (linealmente) mientras que si se observa variación de la intensidad la luz está polarizada.

La Figura 3.2 muestra una porción de cielo con nubes visto a través de un polarizador para dos orientaciones del polarizador, señaladas por las flechas que indican la dirección de vibración que absorbe. En la de la izquierda la porción de cielo vista a través del polarizador es más oscura porque la mayor parte de la luz es absorbida por el polarizador. En la de la derecha no hay mucha diferencia entre el cielo dentro y fuera del polarizador.

La luz que llega de las nubes no está polarizada. Dentro de la nube, la luz ha sufrido múltiples refracciones y reflexiones que hacen que la luz acabe vibrando en cualquier dirección. Por ello a diferencia del cielo la intensidad de las nubes depende muy poco de la presencia o no del polarizador y de su orientación.

Una vez analizado con detalle se observa que el estado de polarización del cielo depende del ángulo formado entre la zona observada y la posición del sol, como se muestra en la Figura 3.2c.

LOS REFLEJOS ESTÁN POLARIZADOS Supongamos que la luz ambiente incide en la interfase de dos medios transparentes, como se observa en la Figura 3.3. Al mirar al cristal vemos luz reflejada (árboles) y luz transmitida (escaparate). La luz reflejada está parcialmente polarizada ya que si se interpone un polarizador lineal, dependiendo del ángulo de incidencia, se observa que el reflejo de los árboles va desapareciendo progresivamente. Además, bajo una condición muy concreta, que en un tema posterior (Tema 8 “REFRACCIÓN Y REFLEXIÓN EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS”) veremos que se denomina ángulo de Brewster, el reflejo desaparece totalmente con el polarizador.



Figura 3.3: Reflejo sobre un vidrio sin polarizador y con polarizador. Se observa que el reflejo desaparece, por lo que significa que el reflejo está polarizado.

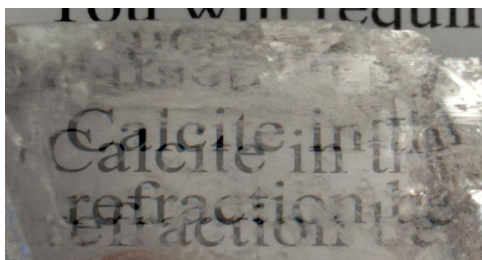


Figura 3.4: Cristal de calcita donde se observa la doble refracción.

CALCITA COMO ELEMENTO POLARIZADOR Uno de los primeros casos descubiertos relacionados con la polarización es la doble reflexión que ocurre en algunos materiales transparentes como la calcita o el espato de Islandia, Figura 3.4. Estos materiales presentan una propiedad (que no analizaremos en este curso) que se denomina birrefringencia o doble refracción. Son capaces de desdoblar un rayo de luz incidente en dos rayos (linealmente polarizados de manera perpendicular entre sí como si el material tuviera dos índices de refracción distintos). En un análisis más riguroso se ha visto que este tipo de materiales son anisótropos, es decir que tienen diferentes propiedades ópticas según la dirección de propagación del campo eléctrico (polarización).

VISIÓN DE ALGUNOS ANIMALES Las abejas, al igual que algunos insectos, presentan un sistema visual sensible a la polarización de la luz. Para ello, utilizan la rodopsina, que es una molécula que absorbe la luz linealmente polarizada en la dirección de sus dipolos. Las moléculas de rodopsina están alineadas en los insectos a diferencia de los vertebrados. El conocimiento del estado de polarización de la luz celeste se utiliza para orientarse. En la medida que una banda de cielo azul siga siendo visible, una abeja es capaz de detectar el estado de polarización de la luz y utilizar esta información para conocer la posición del Sol.²

Por otra parte, el stomatopoda, que es una mantis marítima³, que tiene por lo menos 16 tipos diferentes de fotorreceptores, que se dividen en cuatro clases, 12 de

² Hill, Richard W and Wyse, Gordon A "Fisiología animal" Ed. Médica Panamericana (2006), cap 16 . <http://books.google.es> + (rodopsina + polarizacion)

³ <http://es.m.wikipedia.org/wiki/Stomatopoda>

ellos para análisis de color en las diferentes longitudes de onda -entre ellos cuatro que son sensibles a la luz ultravioleta- y cuatro de ellos para el análisis de la luz polarizada. Por tanto, poseen visión de color hiperspectral. Es el único organismo conocido que puede detectar simultáneamente los cuatro componentes lineales y los dos circular de la polarización requeridos por los parámetros de Stokes, que dan una descripción completa de la polarización. Por otra parte, pueden ver el mismo objeto hasta con tres formas diferentes. En otras palabras, cada ojo posee visión trinocular y percepción de la profundidad

GAFAS POLARIZADAS Y PANTALLAS DE ORDENADOR Otro ejemplo donde se observa el fenómeno de la polarización es en las pantallas (planas) de los ordenadores. Si se utiliza un polarizador, como el de unas gafas polarizadas y se gira, se observa que la cantidad de luz que atraviesa el polarizador desaparece progresivamente.



Figura 3.5: Transmisión de la luz proveniente de una pantalla TFT a través de unas gafas polarizadas

SISTEMAS 3D DE CINE En los sistemas de cine 3D para producir la estereoscopia, el primer método fue codificar la imagen dirigida a cada ojo con dos colores, azul y rojo, y utilizar filtros de colores para cada ojo. Un avance al respecto ha sido el uso de gafas polarizadas. Pueden ser de dos tipos: pasivas, donde hay dos polarizadores fijos lineales o circulares, uno para cada ojo, y activas, donde el estado de polarización cambia de forma sincronizada para cada ojo con las imágenes emitidas.

En el sistema de gafas polarizadas fijas se usan filtros polarizadores perpendiculares entre sí para los ojos izquierdo y derecho respectivamente, Figura 3.6. Esta polarización coincide con la de los filtros que se colocan frente a las lentes de proyección del cinematógrafo. Cada uno de los proyectores, sincronizados entre sí, emiten la imagen correspondiente a uno de los ojos, que pasa a través de un filtro que tiene polaridad distinta al del otro proyector, por lo que tras reflejarse en la pantalla, de las dos imágenes que llegan de forma simultánea al espectador, sólo atraviesa la lente correspondiente al ojo izquierdo la imagen que lleva la polarización adecuada al ojo izquierdo y viceversa, completando de este modo la separación de las imágenes de los dos ojos y permitiendo que el cerebro pueda fusionarlas para crear la imagen en relieve. Es necesario que la pantalla de visualización sea especial y mantenga la polarización. En el caso de las gafas activas, solamente es necesario un proyector que emite de forma consecutiva imágenes para el ojo derecho y luego para el izquierdo. Un sistema de polarización controla el “encendido” y “apagado” de cada uno de los cristales de cada ojo.



Figura 3.6: Gafas polarizadas y uso en cines 3d

POLARIZACIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Veamos ahora cómo podemos relacionar la polarización con el análisis electromagnético de la luz⁴. Supongamos que se incide con una onda armónica plana. Entonces el campo electromagnético incidente resulta ser

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3.1)$$

Como hemos visto, introduciendo esta solución en las ecuaciones de Maxwell para el vacío ((1.12)-(1.15))

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0,$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0.$$

se muestra la transversabilidad entre los campos eléctrico, magnético y el vector de ondas. Por tanto, bajo las condiciones citadas definimos la luz como una onda monocromática constituida por dos campos eléctrico y magnético vibrando perpendicularmente entre sí.

Elipse de polarización

*definición de
polarización*

Definimos el estado de polarización como la trayectoria que describe el vector campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en el plano perpendicular al vector de propagación \mathbf{k} . Este plano se define como plano de polarización. Esta trayectoria es posible debido a que existe un grado de libertad, el giro del vector eléctrico. Si, por ejemplo, la onda se propaga en el eje z , el vector \mathbf{k} es paralelo al eje \mathbf{u}_z ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}_z$) y, en consecuencia, $\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{u}_z$ y $E_z = 0$. En este caso particular, el plano de polarización es el plano xy . Para una onda completamente polarizada, la trayectoria se puede escribir siempre como una elipse. Para su caracterización sea la siguiente onda plana monocromática

$$E_x(z, t) = E_{0,x} \cos(kz - \omega t + \delta_x), \quad (3.3)$$

$$E_y(z, t) = E_{0,y} \cos(kz - \omega t + \delta_y), \quad (3.4)$$

⁴ http://es.wikipedia.org/wiki/Polarización_electromagnética

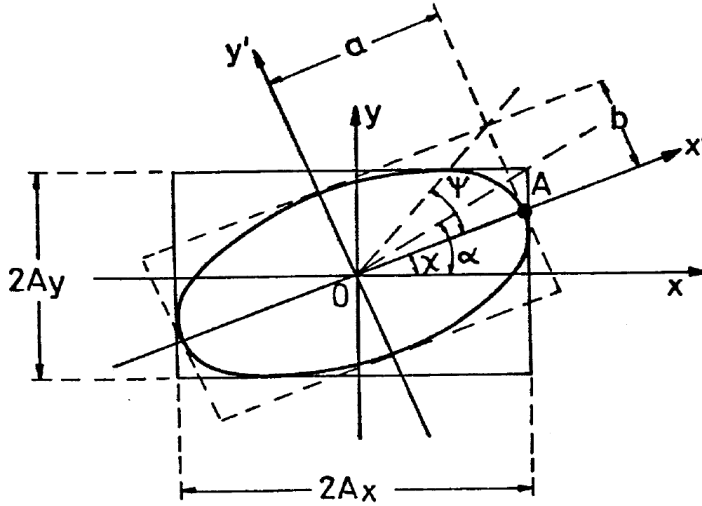


Figura 3.7: Elipse de polarización y sus distintos parámetros característicos.

donde δ_x y δ_y son desfases arbitrarios.

NOTA Si, como hemos supuesto, la dirección del vector de ondas es el eje z , $\mathbf{k} = k(0,0,1)$, entonces la componente $E_z = 0$, por lo que se suele omitir en los estudios de polarización. No obstante, hay que tener en cuenta que el campo eléctrico, definido por la polarización, tiene 3 componentes $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Si el haz no se propaga en la dirección z la amplitud del campo eléctrico se puede determinar mediante una rotación en coordenadas esféricas.

Se define el desfase entre ambas componentes como $\delta = \delta_y - \delta_x$. Esta solución representa un lugar geométrico, la *elipse de polarización*. Si eliminamos el tiempo del sistema anterior se obtiene

$$\frac{E_x^2}{E_{0,x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0,y}^2} - \frac{2xy \cos \delta}{E_{0,x}E_{0,y}} = \sin^2 \delta. \quad (3.5)$$

La obtención de la elipse de polarización en ondas planas monocromáticas, implica la única existencia de tres estados de polarización, lineal, circular y elíptico, siendo los estados lineal y circular degeneraciones de la elipse. La excentricidad de la elipse, e , se define por la relación entre las amplitudes mayor y menor de la elipse, Figura 3.7,

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad (3.6)$$

que nos permite determinar el grado de polarización lineal. Si $e = 0$, la elipse se convierte en una circunferencia, $a = b$, (polarización circular) mientras que si $e = 1$, el semi-eje menor es nulo y la elipse degenera en una recta (polarización lineal). Estos valores se calculan en el complemento de la pág. 45. El sentido de recorrido de la elipse puede ser dextrógiro (horario) o *dextro* o bien levógiro o *levo*. Aquí también es necesario especificar cuál es la dirección de propagación, la misma elipse vista por una cara u otra da diferentes sentidos de giro. Nuestro convenio será suponer que la onda se propaga *hacia nosotros* (es el convenio más generalizado en Óptica).

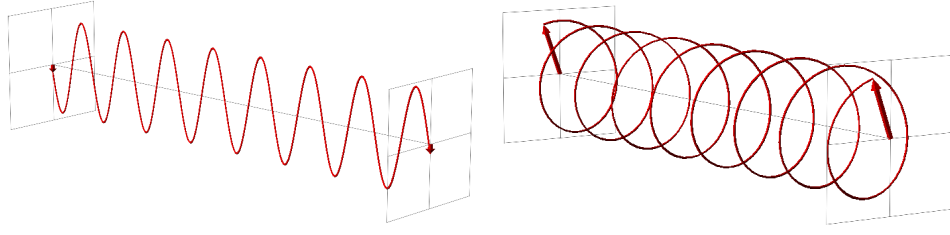


Figura 3.8: Polarización lineal y polarización circular.

ESTADOS DE POLARIZACIÓN

Un *estado de polarización* es una elipse particular. Veamos los casos de polarización lineal, circular y elíptica.

Polarización lineal

Un caso particular de elipse es una recta que pasa por el origen, Figura 3.8a. Esto significa que el campo está vibrando en una misma dirección del espacio. Esta situación se produce cuando

$$\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi \text{ con } m \in \mathbb{Z}, \quad (3.7)$$

o bien cuando $|E_{0x}| = 0$ ó $|E_{0y}| = 0$. Entonces diremos que la polarización es lineal y que la luz es *linealmente polarizada*. Podemos usar la notación

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_{0x}| e^{i\delta_x} \\ |E_{0y}| e^{i\delta_y} \end{pmatrix} = e^{i\delta_x} \begin{pmatrix} |E_{0x}| \\ |E_{0y}| e^{i(\delta_y - \delta_x)} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

y utilizando que $\delta = m\pi$ resulta

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\delta_x} \begin{pmatrix} |E_{0x}| \\ \pm |E_{0y}| \end{pmatrix} = e^{i\delta_x} |E_{0x}| \begin{pmatrix} 1 \\ \pm |E_{0y}| / |E_{0x}| \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

es decir, siempre que haya proporcionalidad a un vector real (aunque el coeficiente sea complejo) se dirá que la luz está linealmente polarizada. Un parámetro importante para caracterizar la luz polarizada es el *azimut* α , que se define como el ángulo que forma el estado de polarización con el eje x .

$$\tan \alpha = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}}. \quad (3.10)$$

De esta forma, si el haz está polarizado en el eje y , el azimut es 90° , mientras que si está polarizado en el eje x el azimut es 0° .

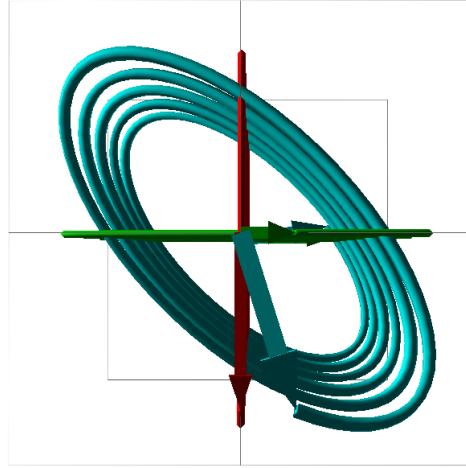


Figura 3.9: Luz elípticamente polarizada.

Polarización circular

Se dice que la luz está circularmente polarizada cuando la elipse se reduce a una circunferencia, Figura 3.8b. Esto ocurre si se dan las siguientes dos condiciones

$$|E_{0x}| = |E_{0y}|, \quad (3.11)$$

$$\delta_y - \delta_x = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \text{ con } m \in \mathbb{Z}. \quad (3.12)$$

En otros términos,

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\delta_x} \begin{bmatrix} |E_{0x}| \\ |E_{0y}| e^{i(\delta_y - \delta_x)} \end{bmatrix} = e^{-i\delta_x} |E_{0x}| \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Para este tipo de luz se tiene siempre que la amplitud es proporcional a un vector de componentes 1 y $\pm i$; el orden y los signos darán el sentido; donde $+$ \rightarrow *levo* y $-$ \rightarrow *dextro*.

Polarización elíptica

El caso más general de luz totalmente polarizada es la polarización elíptica, que se caracteriza por, Figura 3.9,

$$|E_{0x}| \neq |E_{0y}|, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\delta_x} |E_{0x}| \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} e^{i(\delta_y - \delta_x)} \end{bmatrix} = e^{-i\delta_x} |E_{0x}| \begin{bmatrix} 1 \\ \rho e^{i\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Luz natural

Si la onda es estrictamente armónica, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, el campo está describiendo una elipse. A esto lo llamamos *luz completamente polarizada* (el campo describe una elipse —o una circunferencia, o una recta— perfectamente definida).

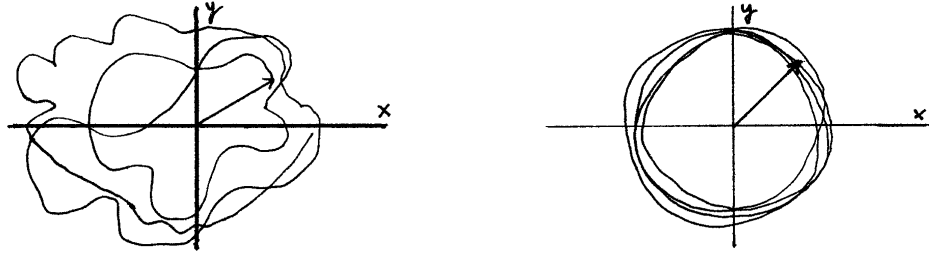


Figura 3.10: Trayectoria del campo eléctrico para un haz de luz despolarizada y parcialmente polarizada.

En el caso más general, la luz es superposición de ondas monocromáticas que generan los distintos procesos de emisión en la materia (átomos). Por una parte el proceso de emisión no es infinito, por lo que las ondas no tienen un tiempo ilimitado. Por otra, cada una de las ondas puede tener una fase diferente respecto de las otras. Debido a todo esto el campo eléctrico global se obtiene de forma macroscópica como un fenómeno estadístico. Tanto la amplitud de campo, como de la fase, puede variar aleatoriamente.

Entonces el vector campo eléctrico ya no describe una elipse, y en general, no sigue ninguna trayectoria reconocible. A este caso se denomina luz no polarizada o *luz natural*, 3.10a. Pero puede ocurrir que la trayectoria *se aproxime* a una de las polarizaciones simples que hemos visto. Es lo que se conoce bajo el nombre de *polarización parcial*, 3.10b.

Los que hemos presentado son dos casos extremos. Podemos tener un estado de polarización más frecuente que los otros, sin que por ello sea el único. A esto se le llama *luz parcialmente polarizada*. Es posible descomponerla en suma de luz natural (las desviaciones de la polarización elíptica) y luz completamente polarizada, de tal modo que

$$I = I_{np} + I_{cp}.$$

Para cuantificar cuán polarizada está una onda, se define el *grado de polarización* como

$$GP = \frac{I_{cp}}{I_{np} + I_{cp}}.$$

CARACTERIZACIÓN DE LOS ESTADOS DE POLARIZACIÓN: REPRESENTACIÓN DE JONES

En representación compleja, el campo eléctrico \mathbf{E} lo podemos describir, en su forma general, siempre que esté polarizado, mediante⁵

$$\begin{aligned} E_x &= |E_{0x}| e^{i\delta_x} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ E_y &= |E_{0y}| e^{i\delta_y} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Consideremos $t = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Como quiera que sean las características de la elipse de polarización en un plano cualquiera perpendicular a la dirección de propagación vienen determinadas por las amplitudes de las componentes y el desfase entre ellas. Una base natural del espacio vectorial la forman los estados con polarización lineal oscilando a lo largo de los ejes x e y , que corresponden a los vectores $E_{0x}\mathbf{u}_x$ y

⁵ volvemos a recordar que el campo eléctrico tiene tres componentes. La polarización se analiza sobre una onda armónica plana que se propaga en la dirección z y por consiguiente $E_z = 0$.

Estado de polarización	Vector de Jones
Lineal en el eje x	$ P_x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Lineal en el eje y	$ P_y\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Lineal a 45°	$ P_{45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Lineal a -45°	$ P_{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
Lineal con ángulo α	$ P_\alpha\rangle = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \pm \sin \alpha \end{bmatrix}$
Circular dextrógira	$ C_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
Circular levógira	$ C_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Figura 3.11: Estados de polarización.

$E_{0y}\mathbf{u}_y$. Una vez conocida la base, que denominaremos $|P_x\rangle$ y $|P_y\rangle$ respectivamente, cualquier estado de polarización puro se puede escribir en función de esta base

$$J_x = |E_{0x}|, \quad (3.17)$$

$$J_y = |E_{0y}| e^{i\delta}, \quad (3.18)$$

donde $\delta = \delta_y - \delta_x$ y hemos eliminaremos la parte compleja de la componente x (un desfase global no afecta al estado de polarización). El vector \mathbf{J} caracteriza la elipse de polarización y se denomina *vector de Jones*. Normalmente se suelen normalizar los parámetros de Jones para que el vector tenga amplitud unidad. Como consecuencia, el vector de Jones se suele escribir como

$$\mathbf{J} = \frac{|E_{0x}|}{\sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} e^{i\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Algunos ejemplos de estados de polarización se muestran en la Figura 3.11.

Bases de polarización

Para formar una base de polarización es necesario dos estados que sean ortogonales entre sí, como los estados $|P_x\rangle$ y $|P_y\rangle$

$$\langle P_x | P_y \rangle = [1, 0]^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

donde hay que tener en cuenta la notación de Dirac.

Los estados circulares $|C_+\rangle$ y $|C_-\rangle$ también son ortogonales entre sí

$$\langle C_+ | C_- \rangle = \frac{1}{2} [1, i]^* \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 0, \quad (3.21)$$

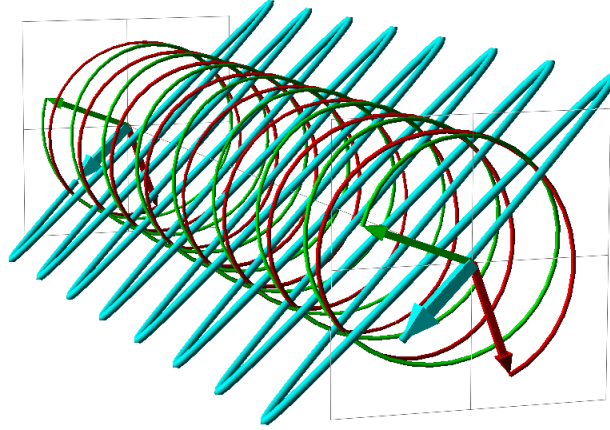


Figura 3.12: La suma de dos ondas de igual amplitud, una polarizada de forma circular levógira y la otra circular dextrógira da lugar a luz linealmente polarizada. El ángulo del haz depende del desfase entre las ondas circularmente polarizadas.

por lo que también se podrían utilizar como base (base de Cardan). Es interesante considerar que la suma de dos estados circularmente polarizados, uno levógira y otro dextrógira da lugar a luz linealmente polarizada, Figura 3.12,

$$|C_+\rangle + |C_-\rangle = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 2/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2/\sqrt{2} |P_x\rangle. \quad (3.22)$$

ELEMENTOS MODIFICADORES DE LA POLARIZACIÓN: POLARIZADORES

Existen elementos ópticos, como los polarizadores, láminas retardadoras, así como ciertos procesos físicos, como la reflexión sobre superficies dieléctricas o metálicas, que modifican el estado de polarización de las ondas. Consideremos que tenemos una onda electromagnética con un estado de polarización $|E\rangle$ que atraviesa un elemento de polarización. El estado de polarización a la salida del elemento polarizador es $|S\rangle$. Esto se puede representar de forma matricial como

$$|S\rangle = M |E\rangle. \quad (3.23)$$

La acción de un elemento óptico lineal sobre un estado de polarización, está descrita por la acción de cierto operador de estado. En el formalismo de Jones estos operadores se corresponden con matrices 2×2 , de forma que (3.23) se puede representar como

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Dentro de los elementos ópticos lineales a estudiar, se ubican los polarizadores y las láminas retardadoras.

Polarizador lineal

Un polarizador lineal, cuyo eje de polarización está ubicado en la dirección x presenta una matriz de polarización

$$\mathbf{PL}(\theta = 0) = |x\rangle \langle x| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

En el caso de un polarizador lineal en el eje y :

$$\mathbf{PL}(\theta = 90^\circ) = |y\rangle \langle y| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Si el polarizador no es perfecto, sino que la transmitancia en el eje de polarización (máxima transmisión) es a_{max} y en la perpendicular (mínima transmisión) es a_{min} , entonces el polarizador se define como

$$\mathbf{PL}_{real}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} a_{max} & 0 \\ 0 & a_{min} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Rotación del polarizador

Si conocemos la matriz que caracteriza un polarizador \mathbf{P} , y rotamos dicho polarizador un cierto ángulo θ , el estado rotado $\mathbf{P}(\theta)$, se calcula como

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{P}(0)\mathbf{R}(\theta), \quad (3.28)$$

donde

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

es la matriz de rotación. Por ejemplo, para el caso del polarizador lineal, la matriz que caracteriza un polarizador lineal rotado resulta

$$\mathbf{PL}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{PL}(\theta = 0)\mathbf{R}(\theta), \quad (3.30)$$

por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{PL}(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Polarizador circular

Un polarizador circular genera un estado de polarización circular cuando se incide con un haz linealmente polarizado. Los polarizadores circulares pueden ser a derechas o a izquierdas

$$\mathbf{PC}(+) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{PC}(-) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Como ejemplo, veamos qué ocurre cuando un haz linealmente polarizado a 0° incide sobre un polarizador circular a derechas,

$$\mathbf{PC}(+) |P_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

el haz resulta circularmente polarizado dextrógiro.

Retardadores lineales

Un retardador lineal es un elemento óptico que actúa únicamente sobre la fase de la luz incidente. Posee dos ejes ortogonales denominados eje rápido y eje lento caracterizados por dos índices de refracción n_o y n_e llamados índice ordinario y extraordinario respectivamente. Estos ejes llevan asociados dos estados de polarización ortogonales invariantes $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ bajo la acción del operador del retardador, \mathbf{L} , salvo fase global

$$\mathbf{PR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Si el ángulo con el eje x es ϕ ,

$$\mathbf{PR}(\delta, \phi) = \mathbf{R}(-\phi) \cdot \mathbf{PR}(\phi = 0) \cdot \mathbf{R}(\phi), \quad (3.35)$$

el polarizador se caracteriza como

$$\mathbf{PR}(\delta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\phi & i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\phi \\ i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\phi & \cos \frac{\delta}{2} - i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\phi \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Luz que atraviesa varios polarizadores consecutivamente

Sea un haz de luz caracterizado por su estado de polarización $|e\rangle$ que atraviesa varios polarizadores $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_N$ de forma consecutiva. Entonces el estado de polarización a la salida del sistema de polarización resulta ser

$$|s\rangle = \mathbf{L}_N \cdots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 |e\rangle, \quad (3.37)$$

es decir, la matriz de Jones del sistema completo resulta ser $\mathbf{L} = \mathbf{L}_N \cdots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1$

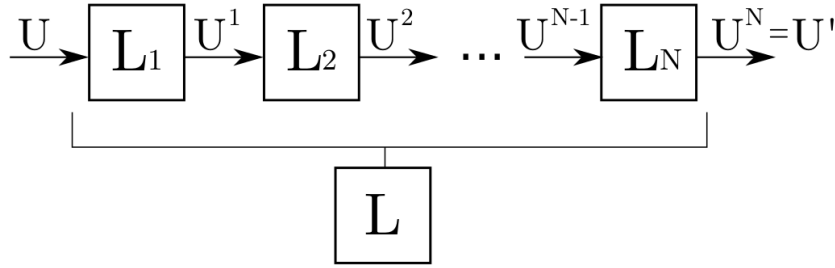


Figura 3.13: Representación de un conjunto de dispositivos lineales a través de la matriz de Jones L , producto de las transformaciones individuales de cada dispositivo.

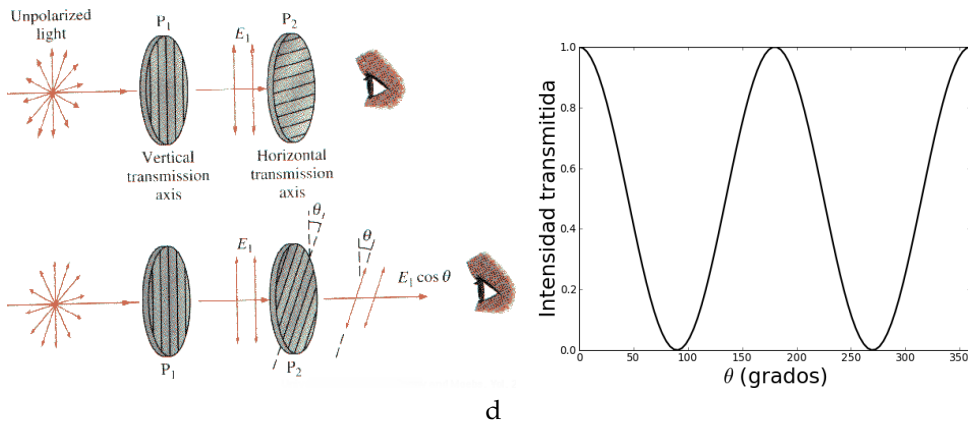


Figura 3.14: a) Explicación de la ley de Malus. Con dos polarizadores cruzados no pasa nada de luz, pero cuando existe un ángulo θ aparece una relación de coseno con el campo. b) Distribución de intensidad a la salida del segundo polarizador en función del ángulo entre los dos polarizadores. Cuando los ejes están alineados la transmisión es máxima mientras que cuando los ejes están cruzados la transmisión es mínima.

LEY DE MALUS

Veamos qué ocurre cuando un haz de luz natural (despolarizada) pasa consecutivamente a través de dos polarizadores lineales, uno fijo y el otro que forma un cierto ángulo θ respecto al primero. Este experimento se realizará en la asignatura Laboratorio de Física III. Cuando un haz linealmente polarizado en el eje x atraviesa dos polarizadores lineales, uno cuyo eje es $\theta = 0^\circ$ y el otro con un ángulo θ , el estado de polarización final resulta

$$\begin{aligned} |u\rangle &= \mathbf{PL}(\theta) |P_x\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= u_0 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por consiguiente la distribución de intensidad es, Figura 3.14,

$$I = I_0 \langle u | u \rangle = I_0 (\cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta) = I_0 \cos^2 \theta. \quad (3.39)$$

CONCLUSIONES

- Uno de los parámetros fundamentales para caracterizar la luz es su estado de polarización, que se define como la trayectoria del campo eléctrico en un plano normal al de polarización (para el caso de ondas planas).
- Entre los estados de polarización nos encontramos con luz lineal, circular, elíptica y natural.
- Los polarizadores son elementos que modifican el estado de polarización de la luz que incide sobre ellos.

ECUACIONES PRINCIPALES

- $\mathbf{J} = \frac{|E_{0x}|}{\sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} e^{i\delta} \end{bmatrix}$
- $|P_x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |P_y\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |P_{45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, |P_{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, |P_\alpha\rangle = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \pm \sin \alpha \end{bmatrix}, |C_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, |C_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}.$
- $\mathbf{PL}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{PL}(\theta = 90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- $\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{P}(0)\mathbf{R}(\theta)$ con $\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$
- $\mathbf{PC}(+) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{PC}(-) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$
- $\mathbf{PR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}$
- $|s\rangle = \mathbf{L}_N \cdots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 |e\rangle,$

COMPLEMENTO: ÁLGEBRA DE POLARIZACIÓN

Las componentes de la amplitud varían como la proyección del estado de luz incidente $|v\rangle$ sobre un estado de luz que caracteriza al polarizador. Por tanto se pueden definir mediante proyectores ortogonales, dado polarizador caracterizado por un estado $|u\rangle$, se define el operador del polarizador, \mathbf{P} como

$$\mathbf{P} = |u\rangle \langle u|. \quad (3.40)$$

Se dice que el polarizador es lineal, circular o elíptico, si $|u\rangle$ es un estado lineal, circular o elípticamente polarizado respectivamente.

Dado que el módulo de un estado coincide con su intensidad a fin de conservar la energía, el operador \mathbf{P} ha de ser unitario. Por tanto el estado característico

del polarizador $|u\rangle$ debe estar normalizado y en consecuencia \mathbf{P} será unitario. El cambio en las amplitudes de los vectores se refleja al actuar \mathbf{P} sobre un estado $|v\rangle$

$$\mathbf{P}|v\rangle = |u\rangle \langle u|v\rangle = \langle u|v\rangle |u\rangle. \quad (3.41)$$

COMPLEMENTO: CARACTERIZACIÓN DE LA ELIPSE DE POLARIZACIÓN

La ecuación (3.5) representa una elipse rotada, siendo de gran interés expresarla en forma canónica con el fin de obtener los semiejes mayor, a , y menor, b , de la elipse. Para su determinación, considérese una elipse

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (3.42)$$

a la cual se le aplica una rotación

$$x' = x \cos \psi + y \sin \psi, \quad (3.43)$$

$$y' = -x \sin \psi + y \cos \psi, \quad (3.44)$$

donde se obtiene la elipse afín

$$x^2 \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \psi}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi}{b^2} \right) + xy \sin(2\psi) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1. \quad (3.45)$$

Al identificar términos se obtienen los semiejes mayor, a , y menor, b de la elipse rotada

$$1/a^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin^2 \delta} \left[\left(\frac{1}{E_{0,x}^2} + \frac{1}{E_{0,y}^2} \right) + \sqrt{\frac{4}{E_{0,x}^2 E_{0,y}^2} \cos^2 \delta + \left(\frac{1}{E_{0,x}^2} - \frac{1}{E_{0,y}^2} \right)^2} \right] \right], \quad (3.46)$$

$$1/b^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin^2 \delta} \left[\left(\frac{1}{E_{0,x}^2} + \frac{1}{E_{0,y}^2} \right) - \sqrt{\frac{4}{E_{0,x}^2 E_{0,y}^2} \cos^2 \delta + \left(\frac{1}{E_{0,x}^2} - \frac{1}{E_{0,y}^2} \right)^2} \right] \right]. \quad (3.47)$$

INTERACCIÓN LUZ MATERIA: MODELO MICROSCÓPICO CLÁSICO

Hemos visto cómo se propaga la luz en el vacío. Se aborda ahora el problema de la interacción de la luz con la materia. Simplificaremos el estudio considerando la interacción de una onda electromagnética con un único átomo. Utilizaremos una descripción clásica en la que el electrón está ligado al núcleo mediante una fuerza elástica, caracterizada por una frecuencia natural de oscilación. La energía necesaria para el movimiento de las cargas se toma de la onda. La onda incidente pierde energía, que se transfiere a los electrones en forma de energía cinética. Debido a que los electrones oscilan (carga variable en el tiempo) la energía adquirida por las cargas se re-emite en forma de radiación electromagnética, pero ahora estas nuevas ondas llevan direcciones diferentes de la que lleva la onda incidente. Esta da lugar a procesos de esparcimiento (scattering en inglés).

Índice

4.1	Modelo de materia: átomo de Lorentz	48
4.1.1	Fuerzas sobre las cargas	49
4.1.2	Ecuación de movimiento de las cargas	50
4.1.3	Solución para la carga ligada	51
4.1.4	Solución para la carga libre	53
4.2	Absorción de la luz por la materia	55
4.2.1	Potencia extraída y esparcida	55
4.3	Generación de luz por la materia	56
4.3.1	Radiación dipolar	57
4.3.2	Carga oscilante	58
4.3.3	Emisión de un oscilador amortiguado	58
4.3.4	Potencia reemitida	61
4.3.5	Muchos elementos dispersores	62

Objetivos

- Conocer el modelo clásico de átomo de Lorentz.
- Conocer el modelo clásico microscópico de la interacción de la luz con la materia.
- Conocer el modelo clásico de esparcimiento de la luz por los átomos.

Referencias generales

- J.M. Cabrera, F.J. López, F. Agulló "Óptica electromagnética, vol. 1: Fundamentos" Addison-Wesley 1998, caps: 4 y 5

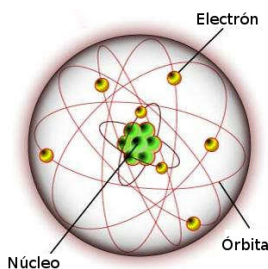


Figura 4.1: Modelo de átomo de Lorentz clásico.

MODELO DE MATERIA: ÁTOMO DE LORENTZ

Hasta ahora hemos tratado la propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, pero no hemos hablado de cómo se generan. Para crear una onda electromagnética es necesario que exista una distribución de cargas y corrientes eléctricas variable en el tiempo. El problema de resolver las ecuaciones de Maxwell con densidades de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ y corrientes $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, variables con el tiempo, es muy complejo de forma general. Para comenzar, describiremos un modelo sencillo de átomo, el átomo de Lorentz, que permite analizar la transferencia de energía entre la onda electromagnética y los electrones. Utilizaremos una descripción clásica (no cuántica), que será suficiente para los fenómenos y la precisión que se abordan.

Un átomo tiene un tamaño característico de $0,1 \text{ nm}$, por lo que sería necesario desarrollar un tratamiento cuántico para su descripción. No obstante esto está fuera del alcance de esta asignatura, por lo vamos a describir el átomo a través de un modelo clásico “modificado”. En el átomo de Lorentz se considera que hay un núcleo pesado formado por cargas positivas y electrones, mucho más ligeros, que están ligados al núcleo y orbitan alrededor. Los electrones tienen carga negativa y el núcleo tiene carga positiva. En la materia, también existen cargas libres, como en los metales, donde los electrones no interactúan con los núcleos, sino que se mueven libremente.

Existen algunos problemas en este modelo según la teoría electromagnética, pues los electrones al seguir una trayectoria curva, están acelerados y entonces deben emitir radiación electromagnética. Esto es justamente lo que queremos explicar pero, al perder energía por radiación, deberían perder energía cinética y eventualmente, deberían caer al núcleo y colapsar. Para poder describir los fenómenos de nuestro interés, la primera hipótesis que consideramos es que los átomos tienen un estado fundamental estable. Podemos imaginar una nube de carga alrededor del núcleo, una idea semi-cuántica del átomo. Esa nube de carga tendrá un centro de carga que puede coincidir o no con el núcleo. Para simplificar el análisis consideraremos moléculas no polares, es decir, sin momento dipolar permanente. Para ellas, el centro de carga positiva y negativa está superpuesto, Figura 4.2a.

Bajo la influencia de un campo electromagnético, el átomo se perturba, cambiando la forma de la nube electrónica en el estado fundamental. El centro de carga negativa ya no estará sobre el núcleo, sino que se forma un pequeño dipolo. Esto corresponde a *excitar* el átomo, Figura 4.2b. Adicionalmente a la fuerza ejercida por el campo electromagnético externo (haz de luz), el dipolo está generado por cargas opuestas y se producirá una fuerza de reacción, que se intentará oponer a esta perturbación electromagnética. Por ello, aparecerá una fuerza de recuperación para reunir de nuevo los centros de carga. Dentro de una teoría clásica diríamos que aparecen fuerzas internas en el átomo que intentan compensar el efecto de la perturbación de los agentes externos.



Figura 4.2: a) Átomo clásico en su estado fundamental. Los centros de masas de las partes positivas (núcleo) y negativas (electrones) coinciden. Por consiguiente no hay momento dipolar. b) Átomo perturbado por un campo electromagnético. En este caso, los centros de masa de la parte positiva y negativa están separados una cierta distancia, por lo que sí se crea un momento dipolar.

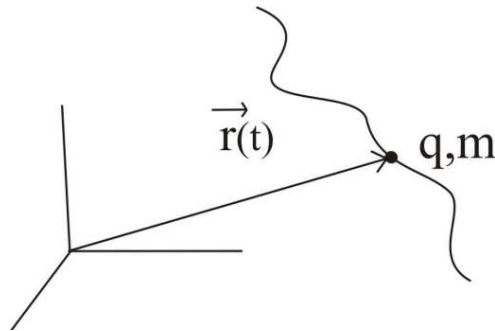


Figura 4.3: . Trayectoria de un electrón.

Fuerzas sobre las cargas

Asumimos que los núcleos son muy pesados en comparación con los electrones y no se mueven. Supondremos que los electrones son puntuales. Para caracterizarlas especificamos su carga $q = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$, su masa $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ y su trayectoria $\mathbf{r}(t)$. Para conocer la trayectoria, consideramos la ecuación dinámica de Newton que relaciona las aceleraciones con las fuerzas \mathbf{F}

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (4.1)$$

Existen varias fuerzas que se aplican sobre el electrón.

FUERZA ELECTROMAGNÉTICA Cuando una carga es excitada por un campo electromagnético variable incidente, la onda transfiere una parte de su energía, que la carga transforma en movimiento. La fuerza ejercida sobre la carga debida a dicho campo viene dada por la expresión de Lorentz (1.10)

$$\mathbf{F}_{ext} = q(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{B}), \quad (4.2)$$

donde $d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad de la partícula. De esta forma se transfiere energía de la onda electromagnética a las cargas. Como el núcleo es mucho más pesado, su aceleración es mínima y la consideramos despreciable (como el sol en el sistema solar). Los electrones, al ser mucho más ligeros, es necesario considerar el efecto de esta fuerza.

FUERZA DE RECUPERACIÓN Existe una fuerza que obliga al electrón a estar en una distancia estacionaria. Para encontrar una expresión explícita para estas fuerzas que nos permita incluirlas en la ecuación de movimiento vamos a hacer la suposición de que la separación inducida entre centros de carga es muy pequeña, lo que nos permitirá usar una expresión lineal en la separación¹, el primer término del desarrollo en serie de \mathbf{F}_{int}

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{r}) \simeq -m_e \omega_0^2 \mathbf{r} + \text{términos no lineales en } \mathbf{r}, \quad (4.3)$$

donde m_e es la masa del electrón y ω_0 es lo que llamaremos *frecuencia de resonancia*. Esta fuerza es similar a la que ejerce un muelle sobre una masa. Hay casos, como es el del campo debido a la radiación de un láser de potencia en los que habría que tener en cuenta términos cuadráticos o incluso de orden superior, ya que la separación entre las cargas es grande y la aproximación lineal no es válida cuando el campo es muy fuerte.

FUERZA DE ROZAMIENTO Además, las cargas, realmente, no suelen estar aisladas, sino que interactúan con el medio ambiente, en forma de colisiones y otros efectos. Por tanto, debe tenerse en cuenta que el sistema de cargas tendrá pérdidas irreversibles de energía. Vamos a introducir un término de fricción que de cuenta de modo fenomenológico de esas pérdidas de energía como si fuera un rozamiento

$$\mathbf{F}_{roz} = -m_e \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (4.4)$$

El problema general de un átomo no aislado, inmerso en un medio ambiente rodeado de átomos es un problema bastante más complicado, pues la onda electromagnética incidente pone en movimiento todas las cargas ligadas. Estas cargas ligadas re-emiten ondas electromagnéticas, como hemos visto. Por tanto, para un átomo determinado llega la onda incidente y, superpuesta, las ondas debidas al movimiento de las ondas ligadas que la rodean, que también afectan a su dinámica. La influencia del campo de una carga sobre sí misma constituye un problema formidable, que se aborda en [?].

Ecuación de movimiento de las cargas

ELECTRONES LIGADOS Consideramos estas tres fuerzas, (la fuerza inducidas sobre el electrón son la fuerza de Lorentz generada por la onda electromagnética, la fuerza recuperadora del oscilador armónico de frecuencia natural ω_0 , y la fuerza de rozamiento) la ecuación de movimiento del electrón se reduce a este “sencillo” problema de ecuaciones diferenciales²

$$\begin{aligned} m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{roz} \\ &= q(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{B}) - m_e \omega_0^2 \mathbf{r} - m_e \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ELECTRONES LIBRES Además de los electrones ligados al núcleo por una fuerza recuperadora, también existen electrones libres, como los electrones externos en los

¹ La *óptica lineal* es aquella para la que vale la aproximación lineal para las fuerzas internas. La mayoría de las fuentes de luz se pueden caracterizar con el desarrollo sólo lineal de la fuerza recuperadora.

Un *medio (electromagnéticamente) isótropo* es un medio en el que no se pueden distinguir unas direcciones de otras a efectos de propagación de campos electromagnéticos. El que se haga una aproximación lineal no implica que el medio sea isótropo o deje de serlo. De hecho se puede hacer óptica lineal anisótropa utilizando para la fuerza recuperadora un coeficiente no escalar, sino tensorial.

² el núcleo es mucho más pesado y consideraremos que no se mueve

metales. La ecuación de evolución de estos electrones es la misma pero, al no estar ligados al núcleo, entonces $\omega_0 = 0$, ya que no hay fuerza recuperadora. Basta, pues, resolver el problema de la carga ligada para después particularizar para frecuencia natural nula y obtener las soluciones de la carga libre.

$$\begin{aligned} m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{roz} \\ &= q(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{B}) - m_e \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Solución para la carga ligada

Resolveremos la ecuación de movimiento para el caso más sencillo posible, la onda armónica plana. No obstante, permite comprender con toda generalidad el problema. Hay que considerar que estamos en un entorno muy pequeño y casi cualquier onda se puede aproximar a una onda plana. En este caso, el campo incidente resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

No hay más que utilizar estos campos en la expresión (4.5). La ecuación resultante sigue siendo complicada para resolverla, de modo que vamos a introducir dos aproximaciones adicionales. La primera es que para una onda armónica plana sabemos que

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_0|. \quad (4.8)$$

Entonces, la fuerza de Lorentz, en valores absolutos, resulta

$$|\mathbf{F}| \approx q \left(|\mathbf{E}| + \frac{v}{c} |\mathbf{E}| \right). \quad (4.9)$$

Vemos que el segundo término presenta un factor v/c respecto al primero. Entonces, asumiendo que la velocidad de los electrones no es relativista, $v \ll c$, podemos aproximar la fuerza sólo por la fuerza eléctrica, $\mathbf{F} \simeq q\mathbf{E}$. Si el campo electromagnético fuera suficientemente fuerte (por ejemplo, el debido a un láser bastante potente) esto no sería cierto³. Con esto, la ecuación queda

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - m_e \omega_0^2 \mathbf{r} - m_e \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (4.10)$$

La ecuación (4.5) es no lineal pues la incógnita \mathbf{r} aparece en un exponente. Admitiremos que en la solución la separación entre cargas positivas y negativas cumple

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \ll \lambda. \quad (4.11)$$

El tamaño típico de los átomos es del orden del nm , y $\mathbf{r}(t)$ cabe esperar que será como máximo el tamaño del átomo. La longitud de onda del visible es del orden de las micras, 500 veces mayor. Por ello,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) \simeq \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(0) = cte, \quad (4.12)$$

³ verificaremos esta aproximación en los problemas.

y podemos incluir este factor constante en la amplitud \mathbf{E}_0 . Con ello queda la siguiente expresión para la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} \simeq q\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (4.13)$$

La fuerza cambia en el tiempo, pero es constante dentro del átomo.

Una vez admitidas ambas hipótesis, la ecuación que tenemos que resolver se reduce a

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (4.14)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico amortiguado y forzado. Esta ecuación diferencial tiene dos soluciones, una homogénea y otra inhomogénea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_h. \quad (4.15)$$

La solución general **inhomogénea** es debida a efectos transitorios, como cuando el átomo está excitado (por la radiación electromagnética) y se apaga la fuente de excitación, el término a la derecha de (4.14). El átomo seguirá vibrando y emitiendo radiación electromagnética, un cierto tiempo hasta que pierda toda la energía cinética. Esta solución tiene la forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.16)$$

El tiempo de desexcitación es del orden de $\tau = 2/\gamma$ y la duración de este transitorio ronda el orden de los *ns*.

Veamos ahora la solución **homogénea**, es decir aquella estable cuando está presente la radiación electromagnética. Probaremos como solución la siguiente onda armónica

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad (4.17)$$

donde la frecuencia ω de la onda es diferente de la frecuencia de resonancia ω_0 . Nos falta conocer cual es la amplitud de la trayectoria \mathbf{r}_0 . Para determinarlo, introduciremos esta solución prueba (4.17) en la ecuación del movimiento (4.14). Calculando las derivadas $\dot{\mathbf{r}} = -i\omega \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ y $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ resulta

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (4.18)$$

Despejando la amplitud de la trayectoria de la carga ligada, obtenemos la siguiente solución

$$\mathbf{r}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0, \quad (4.19)$$

y, por ello, el desplazamiento del electrón resulta ser, Figura 4.4,

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.} \quad (4.20)$$

Esta ecuación liga el movimiento de los electrones con el campo electromagnético incidente. Al ser la amplitud compleja, también se puede escribir de forma $|\mathbf{r}_0| e^{i\phi_0}$,

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}} \mathbf{E}_0 e^{i(\phi_0 - \omega t)}, \quad (4.21)$$

donde $\tan\phi_0 = \gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$. Veamos algunos comentarios relativos a esta ecuación:

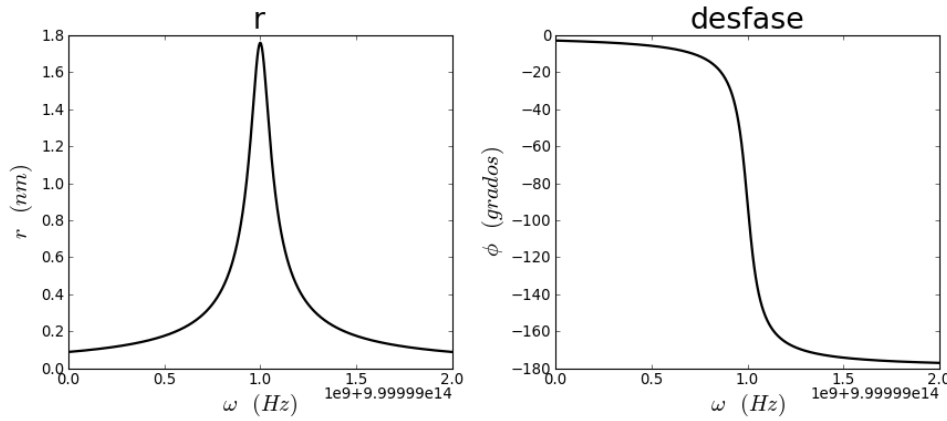


Figura 4.4: Valor absoluto de la posición y desfase en función de la frecuencia de la onda incidente. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^{15} \text{ Hz}$ y $\gamma = 10^8 \text{ Hz}$.

1. El desplazamiento de las cargas es lineal en el campo y además las cargas oscilan a la frecuencia del campo eléctrico incidente, que las fuerza.
2. El desplazamiento del electrón depende del estado de polarización del haz incidente. Si la polarización es lineal, el movimiento será lineal. Si la polarización es circular el electrón se mueve circularmente respecto al punto de equilibrio
3. La constante de proporcionalidad es compleja, se produce un desfase entre el campo incidente y la respuesta del electrón, Figura 4.5. Esto significa que la respuesta del electrón se va retrasando respecto al impulso de la onda electromagnética. Para frecuencias de la onda incidente inferiores a la de la resonancia el electrón es capaz de seguir al campo y el desfase es nulo o muy pequeño. No obstante, cuando la frecuencia del haz incidente es superior a la de la resonancia, el electrón no es capaz de seguir al campo y se retrasa hasta que el desfase se hace π (en contrafase). Este retraso es debido a las fuerzas de rozamiento, sintetizados en γ . Si no hubiera fuerzas de rozamiento, no se produciría ningún tipo de retraso.
4. La constante de proporcionalidad depende de la frecuencia de la onda electromagnética incidente. Si ésta es muy próxima a la de resonancia, la respuesta será muy fuerte⁴. Si esta lejos de la resonancia, el electrón no se entera de la presencia de la onda electromagnética.

En cuanto al cumplimiento de las hipótesis que nos han conducido a (4.20), se darán dos situaciones:

- $\omega \neq \omega_0$ (aproximación buena), se cumplen las condiciones impuestas.
- $\omega = \omega_0$ (resonancia). En este segundo caso la aproximación de estos cálculos clásicos es peor, aunque suficiente. Para ser más rigurosos sería necesario realizar un tratamiento cuántico de la materia.

Solución para la carga libre

La diferencia entre la carga libre y la carga ligada es que la primera no estaba sometida a ninguna fuerza de restitución que intentaba devolverla a la posición de

⁴ no es inmoral que los electrones se exciten fuertemente cuando ven una resonancia

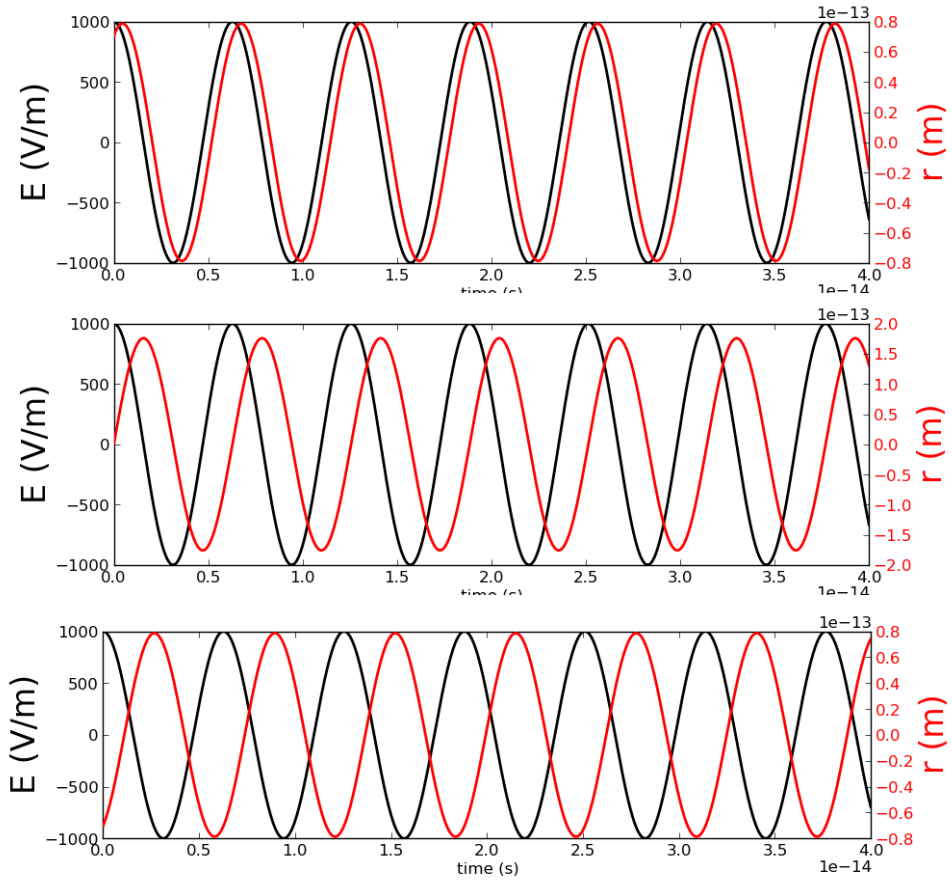


Figura 4.5: Campo eléctrico incidente (E) y desplazamiento del electrón (r) para tres distintas frecuencias de incidencia. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^{15} \text{ Hz}$ y $\gamma = 10^{12} \text{ Hz}$. El campo incidente tiene una amplitud de 1000 V/m . (arriba) $\omega = \omega_0 - \gamma$. (centro) $\omega = \omega_0$. (abajo) $\omega = \omega_0 + \gamma$. Se observa una variación de la amplitud (la mayor es en la resonancia) y el desfase entre la onda excitadora y la respuesta del electrón.

equilibrio. Esta fuerza venía determinada por la frecuencia ω_0 de vibración de la carga ligada, así que si consideramos la ecuación de movimiento de esta y hacemos $\omega_0 = 0$ obtenemos la ecuación de la trayectoria para la carga libre

$$\mathbf{r}(t) = \frac{-q/m}{\omega^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q/m}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)^{1/2}} \mathbf{E}_0 e^{i(\phi - \omega t)}, \quad (4.22)$$

con $\tan\phi = -\gamma/\omega$.

ABSORCIÓN DE LA LUZ POR LA MATERIA

Potencia extraída y esparcida

Como dijimos al principio del capítulo, cuando una onda electromagnética incide en una carga, ésta le transfiere parte de su energía y da origen a los procesos de absorción y re-emisión. Para conocer la cantidad de energía extraída de la onda, vamos a hacer un cálculo indirecto a partir de la energía absorbida por el electrón, ya que se mantiene la conservación de la energía. La cantidad que vamos a analizar es la potencia extraída por la partícula. Ésta será el trabajo realizado por el campo electromagnético (la fuerza de éste sobre la carga, para ser más precisos) sobre la carga ligada en un período T ,

$$\langle P_e \rangle = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \left\langle -q\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -q E_R v_R dt, \quad (4.23)$$

donde estamos usando magnitudes reales ya que el producto escalar del campo y la velocidad es una operación no lineal. La velocidad se puede derivar de forma sencilla a partir de (4.20). Si la onda incidente es una onda armónica plana, este valor resulta

$$\langle P_e \rangle = \frac{q^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \quad (4.24)$$

La potencia es dependiente de la intensidad del campo incidente. También observamos que cuando la frecuencia del haz incidente es mucho menor que la frecuencia de resonancia, $\omega \ll \omega_0$, entonces la potencia extraída resulta

$$\langle P_e \rangle_{\omega \ll \omega_0} = \frac{q^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e} \frac{\gamma\omega^2}{\omega_0^4}. \quad (4.25)$$

Por el contrario, cuando $\omega \gg \omega_0$

$$\langle P_e \rangle_{\omega \gg \omega_0} = \frac{q^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e} \frac{\gamma}{\omega^2}. \quad (4.26)$$

Por otro lado, la potencia extraída en la resonancia $\omega = \omega_0$ es máxima

$$\langle P_e \rangle_{\omega=\omega_0} = \frac{q^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e\gamma}. \quad (4.27)$$

Otro parámetro más interesante, si cabe, es la sección eficaz de extinción, σ_e , que es la relación entre la potencia extraída y el promedio temporal del vector de Poynting, $\langle |S| \rangle = |\mathbf{E}_0|^2 / 2c\epsilon_0$ según se muestra en (2.8). Dividiendo ambos términos resulta,

$$\sigma_e = \frac{\langle P_e \rangle}{\langle |S| \rangle} = \frac{q^2}{m_e c \epsilon_0} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \quad (4.28)$$

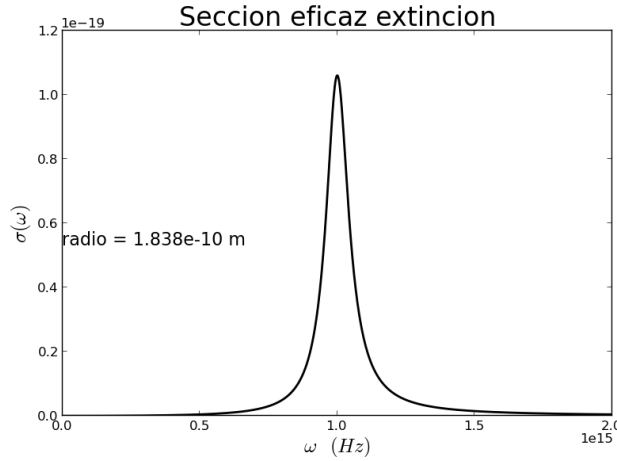


Figura 4.6: Sección eficaz de extracción. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^{15} \text{ Hz}$ y $\gamma = 10^8 \text{ Hz}$.

que se muestra en la Figura 4.6. La sección eficaz tiene unidades de área, $[\sigma_e] = m^2$. Al tener unidades de área, un parámetro interesante es el radio eficaz, que se define como $r = \sqrt{\sigma_e/\pi}$. Tanto la potencia extraída como la sección eficaz son magnitudes que toman valor máximo para la resonancia y fuera de ella se hacen muy pequeñas. Para el caso de la resonancia

$$\sigma_e|_{\omega=\omega_0} = \frac{q^2}{m_e c \epsilon_0 \gamma} = \frac{1,06 \cdot 10^{-5}}{\gamma} m^2. \quad (4.29)$$

GENERACIÓN DE LUZ POR LA MATERIA

Debido a que los electrones se aceleran cuando pasa una onda electromagnética, se produce un dipolo oscilante entre el núcleo y el electrón. Según las ecuaciones de Maxwell, un sistema de cargas variables en el tiempo genera radiación electromagnética. En este sentido la materia recibe la energía de la radiación electromagnética, la entretiene un cierto tiempo en forma de energía cinética y la vuelve a re-emitir pasado otro cierto tiempo en forma de radiación electromagnética. Esto significa que si la luz atraviesa un medio material denso (con muchos átomos), la velocidad de la luz se ve forzosamente retrasada, puesto que la luz es absorbida y reemitida por la materia, y esto cuesta un cierto tiempo, tiempo de decaimiento τ , que está relacionado con γ a través de $\tau = 1/\gamma$. También parte de la energía se disipa en forma de calor, por efecto Joule. Tenemos, pues, diversas situaciones en las cuales el átomo puede re-emitir la energía:

1. Esparcimiento: las cargas re-emiten esa energía en forma de ondas electromagnéticas en direcciones diferentes de las que lleva la onda incidente.
 - a) Esparcimiento de Rayleigh: la frecuencia re-emitida es la misma que la incidente.
 - b) Esparcimiento de Raman y Brillouin: la frecuencia es diferente (efectos no clásicos).
2. Absorción: la energía se transforma en energía potencial y se disipa en forma de agitación térmica o calentamiento. Esta radiación térmica tiene una frecuencia muy diferente a la incidente.

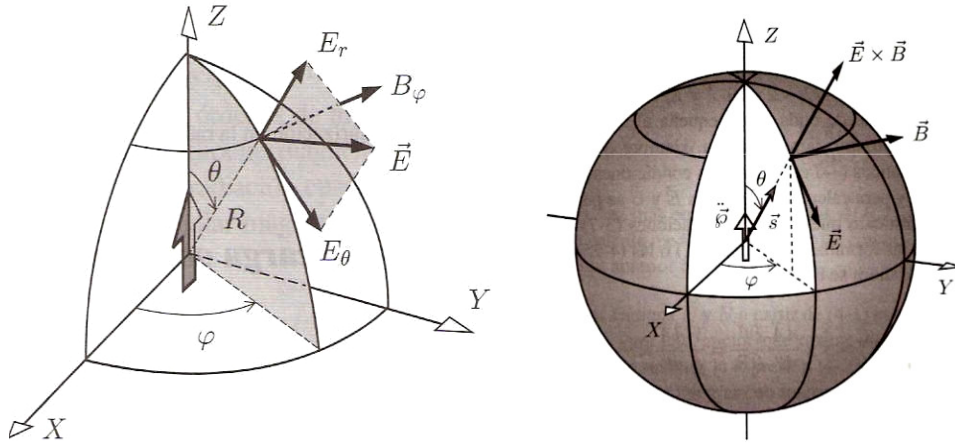


Figura 4.7: (a) Campo eléctrico y magnético generado por un dipolo. (b) Campo electromagnético en la zona de ondas. El vector de Poynting es radial, el campo eléctrico sigue un paralelo y el campo magnético un meridiano.

Radiación dipolar

Calculemos ahora el campo creado por un dipolo oscilante, de tamaño l , generado por el sistema núcleo-electrón en movimiento, en un punto R muy alejado de dicho sistema. Se cumple la condición $l \ll R$. Supondremos además que $l \ll \lambda$, que es equivalente a que los campos varíen muy poco en distancias del orden de l y además deben llevar velocidades no relativistas ($v \ll c$). El momento dipolar eléctrico de un sistema de cargas se escribe

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i, \quad (4.30)$$

donde \mathbf{r}_i es la posición de la carga i -ésima en el espacio. El sistema de cargas genera un campo electromagnético dado por las expresiones siguientes [?]

$$\mathbf{E}(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{p}(t)}{R} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi R} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t)}{\partial t^2} \right), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{B}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} \right). \quad (4.32)$$

Para distancias muy lejanas, la onda emitida puede considerarse plana en un entorno pequeño del frente de ondas (1 cm). A esta aproximación la llamaremos zona de ondas y nos simplifica las expresiones para los campos

$$\mathbf{E}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left(\frac{d^2 \mathbf{p}(t)}{dt^2} \wedge \mathbf{s} \right) \wedge \mathbf{s}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{B}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c R} \frac{d^2 \mathbf{p}(t)}{dt^2} \wedge \mathbf{s}, \quad (4.34)$$

donde \mathbf{s} es un vector unitario en dirección de observación. Es importante notar la dependencia con la inversa de R ya que esto posibilita que los campos tengan mayor alcance que los creados por un dipolo eléctrico estático, cuya dependencia va con la inversa de R^3 . En la Figura 4.7 se muestran los distintos vectores involucrados.

Carga oscilante

Vamos a considerar el tratamiento de la sección anterior para un caso particular en el que tenemos una sola carga con movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio (por simplicidad tendrá dirección en el eje z). Esto es equivalente a un dipolo oscilante con momento dipolar eléctrico

$$\mathbf{p}(t) = qr_0 e^{-i\omega t} \mathbf{z}, \quad (4.35)$$

donde r_0 es la separación máxima de la carga con respecto a su posición de equilibrio. Usando las ecuaciones de la aproximación dipolar eléctrica (4.33) obtenemos las componentes de los campos en coordenadas esféricas

$$E_r = \frac{-qr_0 k^3}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left(\frac{2}{(kR)^3} - \frac{2i}{(kR)^2} \right) e^{i(kR-\omega t)}, \quad (4.36)$$

$$E_\theta = \frac{-qr_0 k^3}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left(\frac{1}{(kR)^3} - \frac{i}{(kR)^2} - \frac{1}{kR} \right) e^{i(kR-\omega t)}, \quad (4.37)$$

$$E_\phi = B_r = B_\theta = 0, \quad (4.38)$$

$$B_\phi = \frac{qr_0 k^3}{4\pi\epsilon_0 c} \sin\theta \left(\frac{i}{(kR)^2} + \frac{1}{kR} \right) e^{i(kR-\omega t)}, \quad (4.39)$$

donde R es la distancia entre el dipolo y el plano de observación. Las líneas de campo magnético \mathbf{B} son círculos perpendiculares al dipolo y las de \mathbf{E} son curvas en planos que contiene al dipolo y además el campo eléctrico tiene simetría de revolución alrededor del dipolo.

A distancias grandes ($R \gg \lambda$) los campos pueden considerarse en la aproximación de la zona de ondas y mediante (4.36) obtenemos unas expresiones más sencillas para los campos (en coordenadas esféricas)

$$E_\theta = cB_\phi = \frac{qr_0 k^2}{4\pi\epsilon_0 R} \sin\theta e^{i(kR-\omega t)}, \quad (4.40)$$

con el resto de componentes nulas. Como se puede observar, localmente \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales entre sí y a la dirección radial. La forma general de la onda es $e^{i(kR-\omega t)}/R$ que se corresponde a una onda esférica, aunque está modulado por el ángulo θ , por lo que adopta la forma de la Figura 4.8.

No obstante, para una cierta posición R suficientemente lejana, en un entorno pequeño, R se puede aproximar a una constante y entonces el campo electromagnético se aproxima localmente a una onda plana, $E_\theta = cB_\phi = E_0 e^{i(kR-\omega t)}$,

El término $\sin\theta$ en (4.40) hace que exista una dependencia del estado de polarización de la luz esparcida según la dirección de observación. Si el haz incidente está polarizado de forma lineal, entonces el campo esparcido mantiene la polarización. pero no se emite en la dirección del movimiento del dipolo, Figura 4.9.

Emisión de un oscilador amortiguado

Hemos supuesto que el dipolo se mueve indefinidamente, dado que le llega una onda electromagnética armónica. Pero en la práctica esto no es así. Cuando la onda incidente deja de llegar el electrón responde perdiendo energía y, finalmente, parándose en su estado de equilibrio. Veamos ahora el fenómeno de la emisión de radiación de un átomo cuando se des-excita un electrón. Para ello, utilizaremos la

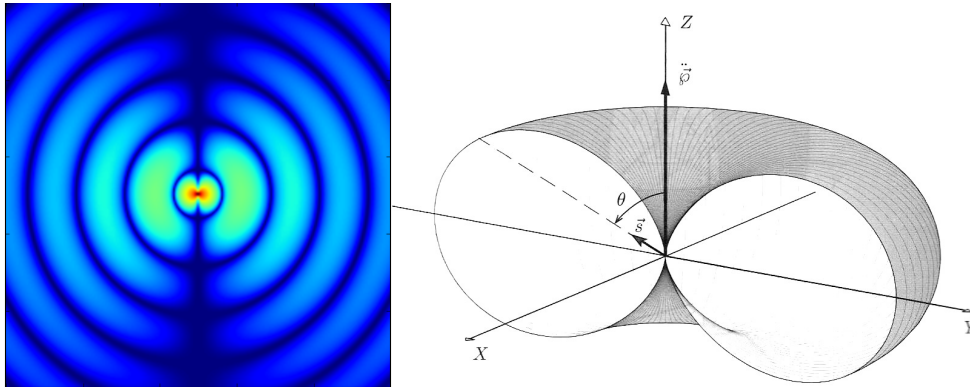


Figura 4.8: (a) Emisión de un dipolo. La fase tiene aproximadamente la ecuación de una esfera, pero la amplitud está modulada por un término $\sin \theta$ que hace que no se emita radiación para ángulos cercanos al eje del dipolo (ver vídeo explicativo). (b) Distribución de la potencia radiada por un dipolo eléctrico. Se observa que en la dirección paralela al dipolo no se emite energía.

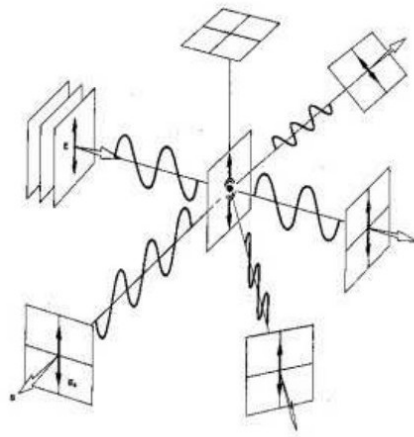


Figura 4.9: Dependencia del estado de polarización de la luz esparcida según la dirección de observación. Si el haz incidente está polarizado de forma lineal, entonces el campo esparcido mantiene la polarización. Como hemos visto, la amplitud del campo depende de la dirección.

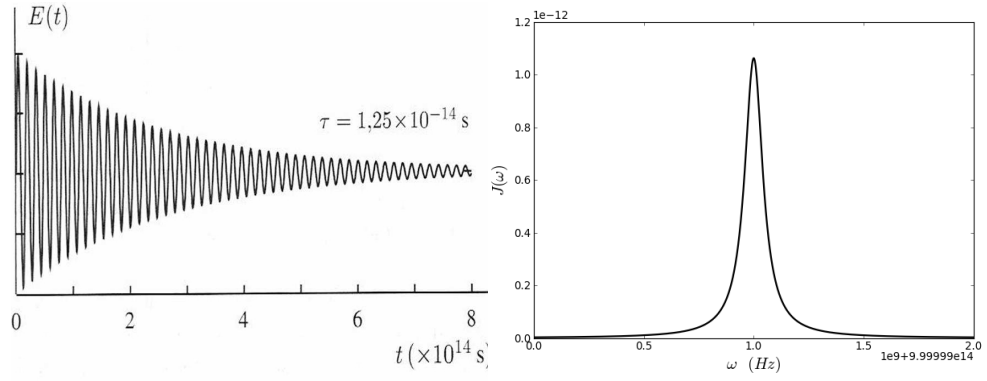


Figura 4.10: (a) Campo eléctrico producido por un oscilador amortiguado en el modelo de átomo de Lorentz. Normalmente el número de oscilaciones es muy grande antes de que la onda desaparezca. (b) Curva lorentziana para la densidad de energía espectral. A mayor amortiguamiento del campo la curva lorentziana tiene una anchura mayor debido a que es la transformada de Fourier de éste (cualitativamente la transformada de Fourier de una función estrecha da una función ancha y viceversa).

solución de un dipolo oscilante que sufre pérdidas de energía. El modelo utilizado es la solución inhomogénea (4.16)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.41)$$

El momento dipolar viene dado por $\mathbf{p}(t) = q\mathbf{r}(t)$, que introducido en las ecuaciones de campo para la zona de ondas y asumiendo, sin pérdida de generalidad, que \mathbf{r} oscila en la dirección del eje x y observamos en la dirección z nos proporciona el campo eléctrico,

$$\mathbf{E}(z, t) \simeq \frac{\omega_0 q r_0}{c^2 z} e^{-(\gamma/2 + i\omega_0)t} \mathbf{u}_z = E_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t} \mathbf{u}_z, \quad (4.42)$$

cuya oscilación amortiguada queda reflejada en γ . Puesto que nuestra onda no es monocromática debido a la amortiguación, estudiemos su distribución en frecuencias⁵. Mediante la transformada de Fourier obtenemos el espectro de frecuencias, que resulta

$$E_\omega = \frac{E_0}{\gamma/2 - i(\omega - \omega_0)}. \quad (4.43)$$

Entonces, la densidad de energía espectral, esto es, la cantidad de energía electromagnética por unidad espectral que llega por unidad de superficie

$$J(\omega) = \epsilon_0 c |E_\omega|^2 = J(\omega_0) \frac{\gamma^2/4}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad (4.44)$$

que si la dibujamos tiene la forma que aparece en la Figura 4.10. En ella apreciamos que hay un máximo de emisión para la frecuencia de resonancia y que para valores ligeramente distintos a esta su valor cae muy rápidamente (curva estrecha). La medida a la mitad de altura del pico de resonancia se denomina anchura espectral γ y su inversa coincide con la vida media del oscilador, es decir, el tiempo para el cual el oscilador deja de emitir radiación de manera notable y su amplitud se hace muy pequeña.

⁵ esto se verá con más detalle en el Cap. 10

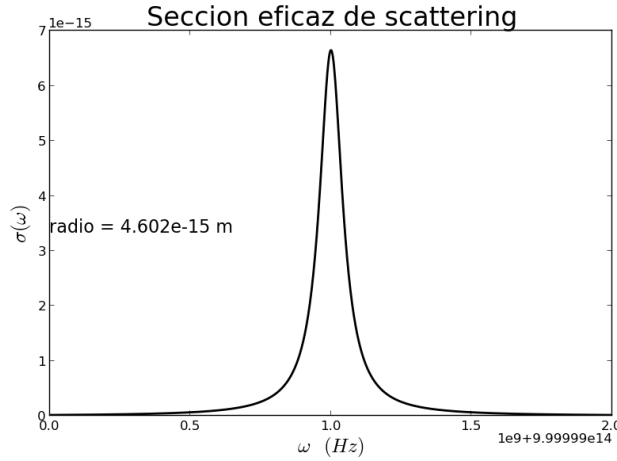


Figura 4.11: Sección eficaz de extracción. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^{15} \text{ Hz}$ y $\gamma = 10^8 \text{ Hz}$.

Potencia reemitida

De la potencia extraída, una parte será absorbida por el átomo y la otra será re-emitida. Esta última la llamamos potencia esparcida y se puede calcular como la potencia emitida dentro de un ángulo sólido $d\Omega$

$$dP = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (4.45)$$

donde $d\mathbf{s}$ es un diferencial de superficie y $\mathbf{p}(t) = q \cdot \mathbf{r}(t)$ es el momento dipolar. Si el desplazamiento viene dado por el modelo de carga ligada y recordando (4.28) se obtiene que la sección eficaz

$$\sigma_s(\omega) = \frac{\langle P_{ae} \rangle}{\langle |S| \rangle} = \frac{q^4}{6\pi m_e^2 c^4 \epsilon_0^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (4.46)$$

Por su parte, si la carga es una carga libre,

$$\sigma_T = \frac{q^4}{6\pi m_e^2 c^4 \epsilon_0^2} \approx 6,7 \cdot 10^{-29} m^2, \quad (4.47)$$

Esto significa que tiene un "radio eficaz" $r_T = 4,6 \cdot 10^{-15} m$ que no depende apenas de la frecuencia de la onda incidente y nos permite escribir, Figura 4.11,

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (4.48)$$

Cuando la frecuencia de resonancia ω_0 es mucho mayor que la frecuencia de la luz incidente, esta sección eficaz de scattering se puede aproximar como

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4, \quad (4.49)$$

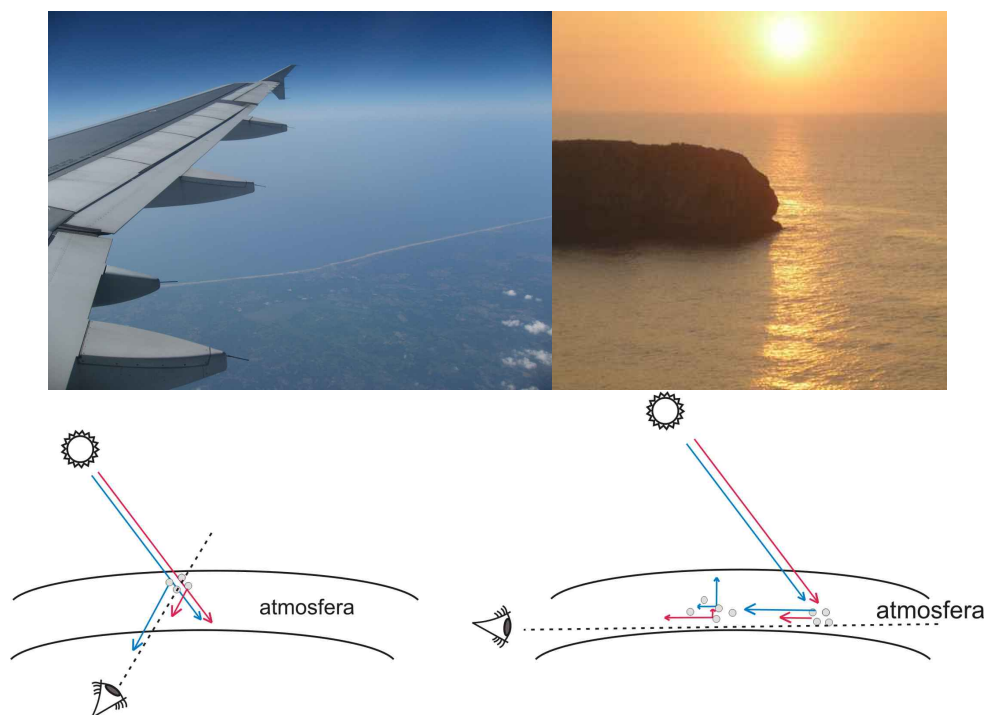


Figura 4.12: (izquierda) Imagen mostrando el cielo, el mar y la tierra cuando el sol está al mediodía. Todo tiene un color bastante azulado debido a la dispersión mayor de las frecuencias altas. (derecha) Imagen en el ocaso. Las altas frecuencias (azules) se han ido y solo queda las rojizas que son menos dispersadas. (abajo) Esquema explicativo. Fotos de Alfredo Luís

que permite explicar, en primera aproximación, el color azul del cielo Figura 4.12⁶. Las frecuencias mayores (azules) son más esparcidas que las bajas frecuencias (rojos). Entonces, cuando hay muchos elementos dispersores, que se sitúan en el ultravioleta, como al atardecer cuando los rayos directos del sol atraviesan una capa mayor de atmósfera, las frecuencias que sobreviven en la dirección del haz incidente son las rojas.⁷

Esto nos lleva a indicar que para observar un rayo de luz, que no incida directamente en nuestro ojo, es necesario la presencia de elementos dispersores, Figura 4.13. En el vacío, una onda plana (o cosas parecidas) se propagan en una dirección predeterminada y solo en esa. Para poder visualizar el haz, es necesario la presencia de elementos dispersores. Claro está que cuanto mayor sea su presencia, menor cantidad de energía se propaga en la dirección inicial.

Muchos elementos dispersores

En este tema hemos considerado que solamente tenemos un átomo aislado o, muchos átomos suficientemente alejados como para que no haya interacción entre ellos. Aunque los procesos son más complicados, el efecto de la dispersión puede hacer incluso que el haz incidente desaparezca, como en el caso de una niebla densa, Figura 4.14 izquierda. Los objetos lejanos no se observan, porque su luz es dispersada totalmente. En este esparcimiento múltiple, que también puede ocurrir en un medio muy desordenado, como las gotas de agua en el cielo que forman

⁶ http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_scattering

⁷ <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/gioq/fenopt/imagenes/planetaazul/index.htm>
<http://pendientedemigracion.ucm.es/info/gioq/fenopt/imagenes/planetar rojo/index.htm>



Figura 4.13: (izquierda) Imagen mostrando el cielo, el mar y la tierra cuando el sol está al mediodía. Todo tiene un color bastante azulado debido a la dispersión mayor de las frecuencias altas. (derecha) Imagen en el ocaso. Las altas frecuencias (azules) se han ido y solo queda las rojizas que son menos dispersadas. (abajo) Esquema explicativo. Fotos de Alfredo Luís

las nubes, gotas de agua en el agua que forma la espuma (como la cascada en la imagen), la sal, azúcar, talco, etc. , la luz cambia muchas veces de dirección y entonces se pierde la direccionalidad de los haces esparcidos con la frecuencia de la onda incidente. Entonces todo nos parece blanco (Figura 4.14-derecha).

Finalmente, también puede ocurrir que haya tanta dispersión que parezca que la luz rodee los objetos opacos, como en el caso de la Figura 4.14-abajo. Parece que en la mano no hay huesos⁸. Simplemente los haces son tan dispersados que lo han rodeado. El color rojizo es debido a la hemoglobina, el azul es absorbido por la carne.

CONCLUSIONES

- Las ondas electromagnéticas interactúan con la materia a través de la fuerza de Lorentz, pues ésta se puede suponer como una serie de átomos formados por electrones y núcleos. Además hay otras fuerzas que actúan sobre el electrón que la ligan al núcleo, como la fuerza elástica que une el electrón al núcleo y la fuerza de rozamiento que da cuenta de las fuerzas con el medio ambiente.
- Hemos sido capaces de desarrollar una ecuación de la trayectoria del electrón en función de la luz incidente y la hemos resuelto utilizando una serie de aproximaciones. El conocimiento de la trayectoria del electrón nos ha permitido calcular la energía de la onda incidente absorbida por éste.

⁸ doy fe, hay huesos.



Figura 4.14: (arriba izq) Día de niebla. Los objetos lejanos no se ven puesto que todo el haz incidente ha sido dispersado. (arriba der) Agua blanca. La luz se dispersa muchas veces y se pierde la direccionalidad del haz inicial. (abajo) Cuando hay dispersión múltiple puede parecer que la luz rodea los objetos opacos y que no existen, como aquí que se no se observan los huesos.

- Cuando una onda electromagnética llega a un átomo, éste absorbe parte de la radiación y se acelera re-emitiendo energía en forma de radiación electromagnética.
- Una carga en movimiento acelerado genera radiación electromagnética, que presenta un cierto grado de polarización dependiendo de la dirección.
- La cantidad de energía extraída del haz incidente y esparcida depende fuertemente de la frecuencia de resonancia de la interacción electrón-núcleo.

Parte II

LUZ EN MEDIOS MATERIALES

La materia está formada por una multiplicidad de átomos. Se aborda el problema de la propagación de la luz a través de medios materiales. Se estudiará cómo la luz interactúa con la materia desde un punto de vista estadístico - macroscópico. En primer lugar, se analizará cómo la materia, descrita en forma de cargas y corrientes, modifica el campo local. El campo externo y el interno inducido por la oscilación de las cargas se confunden y no se pueden separar. Es por ello que se realiza una re-definición del campo eléctrico y magnético dentro de la materia. El propio planteamiento de la propagación en medios ópticamente densos (un número muy elevado de partículas en dimensiones del orden de la longitud de onda) sugiere plantear una estrategia distinta: mediante promedios espaciales de la materia y el campo que eliminan irregularidades y fluctuaciones a escala atómica que no tienen consecuencias macroscópicas. Con esto, desembocamos en las ecuaciones de Maxwell macroscópicas. Las relaciones de constitución o ecuaciones materiales permiten resumir la presencia de la materia mediante una serie de parámetros que permiten clasificar los medios materiales: los valores de estos parámetros determinan sus propiedades ópticas. Como caso más sencillo, aunque de gran importancia consideraremos las relaciones de constitución lineales.

Índice

5.1	Introducción	68
5.2	Medios ópticamente densos: el continuo óptico	68
5.3	Promedio espacial de las ecuaciones de Maxwell	70
5.3.1	Polarización y magnetización	70
5.4	Vectores \mathbf{D} y \mathbf{H}	71
5.5	Relaciones de constitución lineales	72
5.6	Ecuaciones de Maxwell macroscópicas para ondas armónicas . .	73
5.7	Clasificación de los medios	74
5.8	Relaciones energéticas	75

Objetivos

- Conocer el modelo clásico macroscópico de la interacción de la luz con la materia.
- Saber caracterizar ópticamente la materia a partir de parámetros macroscópicos-

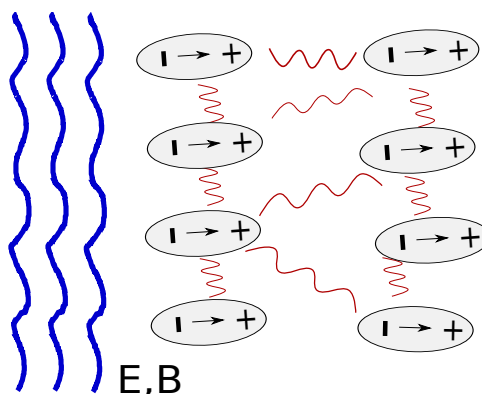


Figura 5.1: Interacción radiación-materia: los campos de las cargas excitadas (libres y ligadas) se superponen al campo incidente. Todos interactúan con todos.

INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 4 hemos visto cómo las ondas electromagnéticas interactúan con un átomo formado por un núcleo y un electrón. Sin embargo, la materia es mucho más compleja; está constituida por una inmensa cantidad de átomos ($\sim 10^{28}$ átomos por metro cúbico para el caso de sólidos). El problema de la interacción luz - materia, tratado con rigor mecánico, es inabordable. Sería necesario resolver las ecuaciones de Maxwell acopladas a la materia y describir el estado de movimiento de cada uno de los átomos. Un conocimiento tan explícito, además de imposible, sería inútil. Asumiendo que existe una gran cantidad de átomos por cada “unidad óptica elemental”, que en nuestro caso es la longitud de onda, la luz ve la materia como un continuo. Se realiza, pues, un análisis estadístico para caracterizar la materia a partir de unos pocos parámetros. Estos se incluyen en las ecuaciones de Maxwell y nos indicarán cómo se comportan las ondas electromagnéticas en el seno de la materia, supuesta uniforme.

MEDIOS ÓPTICAMENTE DENSOS: EL CONTINUO ÓPTICO

Un medio ópticamente denso es aquel en el cual la distancia media entre partículas es mucho menor a la longitud de onda de la luz incidente. Entonces, existe acoplamiento entre los campos de los átomos y, en consecuencia, el campo local que observa un átomo individual no es únicamente el campo externo aplicado, Figura 5.1. Para el rango óptico, prácticamente todos los medios con los que tratamos, tanto sólidos, líquidos y gases a presión normal, son ópticamente densos. No obstante, la consideración de medio diluido o denso depende fuertemente de la longitud de onda con la que se trabaje. Por ejemplo, para rayos x ($\lambda \sim 0,1 \text{ nm}$) un sólido puede considerarse un medio diluido, mientras que el aire es un medio ópticamente denso para las longitudes de onda ópticas ($\lambda \sim 1 \mu\text{m}$).

A partir de ahora trabajaremos exclusivamente en el caso de medio ópticamente denso, pues es el de mayor aplicabilidad. Veremos que en este caso podemos caracterizar un material a partir de únicamente un parámetro, llamado *índice de refracción*. En la materia ordinaria puede haber del orden de 10^{28} átomos por metro cúbico. Considerando el volumen de un cubo cuyas aristas sean longitudes de on-

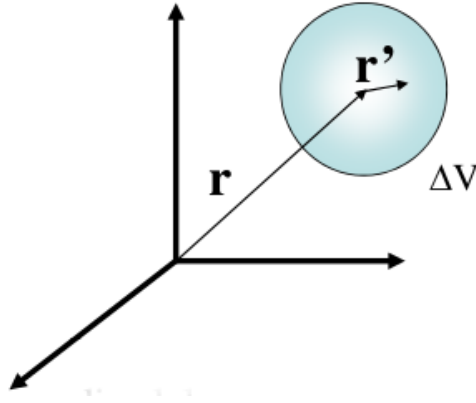


Figura 5.2: Sistema de coordenadas. De esta forma se integra en un volumen ΔV , en la coordenada \mathbf{r}' para realizar el promedio y se mantiene la coordenada \mathbf{r} como dependencia espacial.

da λ en el visible, encontramos que en la atmósfera tenemos 10^7 átomos, mientras que en un sólido típico podemos encontrar del orden de 10^{10} átomos. Esto indica que no podemos hacer la aproximación de partículas independientes. Sin embargo debido a la gran cantidad de átomo podemos realizar las siguientes aproximaciones.

1. En todo elemento de volumen infinitesimal ΔV el campo será constante, puesto que las variaciones espaciales de éste se producen en el orden de la longitud de onda, que es mucho mayor que $\Delta V^{1/3}$.
2. Se prescindirá del carácter discreto de la materia. Para ello se introducirán promedios espaciales de las magnitudes implicadas: \mathbf{E} , \mathbf{B} , ρ y \mathbf{j} . Esto simplificará la descripción, aunque tiene el inconveniente de que no vamos a poder separar campo incidente de campo re-emitido (debido a la proximidad de las cargas). El campo electromagnético tendrá dos componentes indistinguibles, una debida a campo externo y otra debida a la reacción de la materia a éste campo.

Vamos a utilizar un pequeño volumen esférico ΔV , parametrizado de modo que \mathbf{r} sea la coordenada del centro de la esfera y $\mathbf{r} + \mathbf{r}' \in \Delta V$, Figura 5.2. Sobre este volumen los promedios se escriben

$$\mathbf{E}_{mac}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}', \quad (5.1)$$

donde los subíndices distinguen campo microscópico de campo macroscópico, que por ser un promedio no hace caso de las variaciones a escala atómica. La longitud de onda de la radiación es tan grande que ésta no percibe el carácter discreto de la materia. Esta ecuación significa que el campo eléctrico estadístico en la materia (campo macroscópico) es el promedio temporal del campo microscópico

$$\langle \mathbf{E}_{mic} \rangle \equiv \mathbf{E}_{mac}. \quad (5.2)$$

De la misma forma se pueden promediar espacialmente el resto de magnitudes propias del electromagnetismo, como \mathbf{B} , ρ y \mathbf{j} .

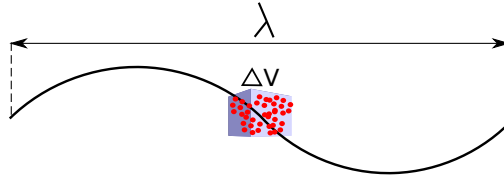


Figura 5.3: En $\Delta V \ll \lambda^3$ encontraremos muchísimas partículas, cargas libres y ligadas. La dinámica en su interior es muy complicada. Pero por su tamaño frente a λ , en el interior el campo se puede considerar homogéneo.

PROMEDIO ESPACIAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

El problema de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas sobre un continuo es significativamente más sencillo que el problema de las ecuaciones de Maxwell sobre cargas discretas. Como las derivadas $\partial/\partial x$ de las ecuaciones de Maxwell son respecto a \mathbf{r} y la integral es respecto a \mathbf{r}' se puede extraer la derivada del promedio de forma que resulta

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_{mic} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial x}, \quad (5.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{mic} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Si tomamos promedios a ambos lados de las ecuaciones de Maxwell

$$\langle \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic} \rangle = \langle \rho \rangle, \quad (5.5)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{B}_{mic} \rangle = \langle 0 \rangle, \quad (5.6)$$

$$\left\langle \nabla \wedge \mathbf{E}_{mic} + \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = \langle 0 \rangle, \quad (5.7)$$

$$\left\langle \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mic} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle = \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (5.8)$$

y se utilizan las anteriores definiciones obtenemos

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mac} = \langle \rho \rangle, \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{mac} = 0, \quad (5.10)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_{mac} + \frac{\partial \mathbf{B}_{mac}}{\partial t} = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} = \langle \mathbf{j} \rangle. \quad (5.12)$$

Polarización y magnetización

La segunda y tercera ecuaciones están ya en el formato que buscamos, mientras que las otras necesitan de algunos arreglos, para los que, valiéndonos de resultados del electromagnetismo, hemos dividido las contribuciones de las cargas y corrientes en las producidas por cargas y corrientes libres, como los electrones de valencia en los metales, y de cargas y corrientes ligadas a la materia. Para el caso de cargas resulta

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho_{lib} \rangle + \langle \rho_{lig} \rangle, \quad (5.13)$$

donde $\langle \rho_{lig} \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. El vector

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \mathbf{r}_j \quad (5.14)$$

recibe el nombre de *polarización* y corresponde al momento dipolar por unidad de volumen.

Para el caso de corrientes, la división de cargas libres y ligadas es

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}_{lig} \rangle + \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle, \quad (5.15)$$

donde $\langle \mathbf{j}_{lig} \rangle = \partial \mathbf{P} / \partial t + \nabla \wedge \mathbf{M}$. El vector

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{1}{2} q_j \dot{\mathbf{r}}_j \wedge \mathbf{r}_j, \quad (5.16)$$

se llama *magnetización*, y corresponde a la magnetización por unidad de volumen. Así, las dos ecuaciones de Maxwell que dependen de la materia quedan

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mac} = \langle \rho_{lib} \rangle - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} = \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M}. \quad (5.18)$$

VECTORES **D** Y **H**

A partir de ahora, por simplificar la notación, prescindiremos en lo que sigue de los subíndices *mac*; denominando $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_{mac}$ y $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_{mac}$. El campo eléctrico dentro de la materia, como vemos está formado por dos contribuciones: el campo externo y la reacción de la materia a este campo externo. Definiendo unos nuevos vectores llamados, respectivamente, *desplazamiento eléctrico* y *campo magnético*

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}, \quad (5.19)$$

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}}, \quad (5.20)$$

se re-escriben las dos ecuaciones en cuestión

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \langle \rho_{lib} \rangle, \quad (5.21)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle. \quad (5.22)$$

Las ecuaciones de Maxwell macroscópicas son ecuaciones en las que aparecen cuatro campos. Y eso es porque dos de ellos tienen en cuenta la materia \mathbf{P} y \mathbf{M} y las otras dos no. Éstas son las ecuaciones de Maxwell macroscópicas

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \langle \rho_{lib} \rangle, \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.24)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.25)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.26)$$

Hasta este momento, la única aproximación considerada es que el medio es ópticamente denso y que se pueden aplicar elementos estadísticos para el campo dentro de la materia.

RELACIONES DE CONSTITUCIÓN LINEALES

Existen múltiples modos en los que la materia se puede polarizar eléctrica y magnéticamente. Aquí estamos interesados únicamente en las causadas por las ondas electromagnéticas que se propagan en el medio. De modo que los \mathbf{r}_j de la definición de \mathbf{P} son las separaciones entre carga positiva y negativa inducidas por los campos incidentes. Esto significa que la única dependencia que vamos a considerar como mecanismo de polarización y magnetización son los electromagnéticos

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad (5.27)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}). \quad (5.28)$$

La relación entre la polarización y magnetización con los campos puede llegar a ser una dependencia considerablemente complicada. Normalmente los campos eléctricos afectan de una manera más importante que los magnéticos, aunque hay situaciones en las cuales el efecto del campo magnético no se puede despreciar. Por simplificar, consideraremos que no hay dependencias cruzadas, es decir el campo magnético no afecta a la polarización y el campo eléctrico no afecta a la magnetización. Estos efectos se denominan electroóptico y magnetoóptico. En el caso general esta relación no es lineal, que se puede describir mediante

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \alpha_2 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \beta_2 \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (5.30)$$

Si el medio es anisótropo, los parámetros α_j y β_j pueden ser distintos para cada dirección, por lo que tendrán un carácter tensorial. Los términos cuadráticos dan lugar a lo que se denomina Óptica no lineal, que está fuera de este curso. Experimentalmente se observa que cuando los campos eléctricos y magnéticos no son extraordinariamente intensos, la relación entre la polarización y magnetización con los campos es muchas veces lineal

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \simeq \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),} \quad (5.31)$$

relaciones de
constitución

$$\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \simeq \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t),} \quad (5.32)$$

donde χ_e, χ_m son, respectivamente la *susceptibilidad eléctrica* y la *susceptibilidad magnética* del material.

Como la definición de corriente eléctrica es $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$, también podemos plantear una relación similar para la densidad de corriente,

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \dot{\mathbf{r}}_j, \quad (5.33)$$

donde también se asume que la velocidad para una onda armónica es proporcional a \mathbf{E} , con lo que

$$\boxed{\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \quad (5.34)$$

siendo σ el parámetro que relaciona la corriente como el campo, que se denomina *conductividad eléctrica*. Utilizando estas relaciones lineales entre las polarizaciones y el campo finalmente se pueden obtener el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el campo magnético \mathbf{B} , proporcionales a \mathbf{H}

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E}, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}. \quad (5.36)$$

La relación de proporcionalidad entre los campos en la materia y los campos externos aplicados se denominan constante dieléctrica del material, ε , y permeabilidad magnética, μ , de modo que¹

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (5.37)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (5.38)$$

donde, por definición, $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ es la constante dieléctrica y $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ es la permeabilidad magnética. En general, ocurrirá que χ_e , χ_m , σ , ε y μ serán funciones con valores complejos dependientes de la posición \mathbf{r} y también de la frecuencia ω . Con las definiciones dadas, podemos expresar las ecuaciones de Maxwell en la materia a partir de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H}

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \langle \rho_{lib} \rangle, \quad (5.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (5.40)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (5.41)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.42)$$

donde hemos considerado que la constante dieléctrica ε , y permeabilidad magnética μ , no dependen ni del tiempo ni del espacio, de forma que salen fuera de las derivadas.

ECUACIONES DE MAXWELL MACROSCÓPICAS PARA ONDAS ARMÓNICAS

Supongamos que el campo en la materia tiene forma de onda armónica

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

Seguimos teniendo la densidad de carga libre $\langle \rho_{lib} \rangle$, que podemos relacionar con el campo eléctrico a partir de la ecuación de continuidad que relaciona las densidades de carga y las corrientes libres

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{lib} + \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} = 0. \quad (5.44)$$

Tomando promedios y considerando una relación lineal entre el campo y las corrientes, ley de Ohm,

$$\mathbf{j}_{lib} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.45)$$

¹ En principio podríamos pensar que se tendría que escribir \mathbf{H} en función del campo externo que lo genera \mathbf{B} , pero por razones históricas se suele utilizar el campo \mathbf{H} .

obtenemos

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} = -\nabla \cdot [\sigma \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}]. \quad (5.46)$$

Debido a que las ondas son armónicas, podemos realizar la integración de una forma sencilla

$$\langle \rho_{lib} \rangle = -\nabla \cdot \left(\frac{i}{\omega} \sigma \mathbf{E} \right). \quad (5.47)$$

Asimismo, las derivadas temporales también se pueden resolver de forma sencilla

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{H}, \quad (5.49)$$

de forma que las ecuaciones de Maxwell en la materia quedan

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = -\frac{i}{\omega} \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}_0, \quad (5.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (5.51)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_0 = i\omega \mu \mathbf{H}_0, \quad (5.52)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 - i\omega \varepsilon \mathbf{E}_0. \quad (5.53)$$

Finalmente, definiendo un nuevo parámetro, la *constante dieléctrica generalizada*, ε_{gen} , que contiene el efecto de las cargas ligadas y también el de las cargas libres,

$$\boxed{\varepsilon_{gen} = \varepsilon + \frac{i}{\omega} \sigma}, \quad (5.54)$$

obtenemos las siguientes que las ecuaciones de Maxwell son

$$\varepsilon_{gen} \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.55)$$

$$\mu \nabla \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.56)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - i\omega \mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.57)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + i\omega \varepsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.58)$$

donde hemos considerado que no existe dependencia espacial en los parámetros. Veamos algunas consideraciones importantes de este conjunto de ecuaciones.

- Hemos reducido el problema de describir la materia al de especificar dos parámetros: ε_{gen} y μ . Nuestro trabajo es ahora el de, conocidos estos parámetros, resolver las ecuaciones para diversos medios, pues sus soluciones caracterizan completamente la propagación de la radiación en los medios ópticamente densos.
- Estas ecuaciones son formalmente iguales a las ecuaciones de Maxwell en el vacío para ondas armónicas, donde se sustituye ε_0 por ε_{gen} , μ_0 por μ , y \mathbf{B}_0 por \mathbf{H}_0 .

CLASIFICACIÓN DE LOS MEDIOS

Los parámetros ε_{gen} y μ describen, desde el punto de vista macroscópico, la materia bajo la aproximación de linealidad. Consideraremos que los medios son no magnéticos por lo que la permeabilidad magnética resulta $\mu \approx \mu_0$. En función de lo que valgan la conductividad y la constante dieléctrica generalizada tendremos

diversos tipos de materiales, que etiquetamos con los siguientes nombres convencionales :

- **conductores** $\sigma \neq 0$, **dieléctricos** $\sigma = 0$ (no tienen cargas libres).
- **isótropo** ϵ_{gen} escalar, **anisótropo** ϵ_{gen} es un tensor.
- **inhomogéneo** ϵ_{gen} es función de la posición $\epsilon_{gen}(\mathbf{r})$. Si no, el medio es **homogéneo**.
- **dispersivo** ϵ_{gen} es función de la frecuencia $\epsilon_{gen}(\omega)$. Si no es así, el medio es **no dispersivo**.
- **Transparente** $\epsilon_{gen} \in \mathbb{R}$. **Absorbente** si $\epsilon_{gen} \in \mathbb{C}$.

Por medio homogéneo se dice que las propiedades del material son iguales en cualquier punto \mathbf{r} del espacio, mientras que isótropo significa que las propiedades de la materia son independientes de la dirección en la que miramos.

RELACIONES ENERGÉTICAS

De igual forma como hicimos para el caso del vacío, ahora derivaremos las relaciones energéticas que suceden en el caso de la propagación de las ondas electromagnéticas para el caso en que éstas sucedan en medios materiales. Según la teoría electromagnética, la energía transportada por un campo eléctrico, \mathbf{E} , al propagarse por un medio caracterizado por su constante dieléctrica ϵ y en un instante dado que se localiza en un elemento de volumen dV es

$$dW_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (5.59)$$

De igual forma, en este mismo volumen, caracterizado magnéticamente por su permeabilidad magnética μ , la inducción magnética \mathbf{B} también transporta una energía que resulta ser

$$dW_B = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (5.60)$$

Como consecuencia, la energía total dW , localizada en dicho elemento de volumen resulta

$$dW = \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV, \quad (5.61)$$

siendo la energía total en un volumen finito V , cerrado por una superficie S

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV. \quad (5.62)$$

Para ver cómo varía la energía dentro del volumen V con el tiempo, bastará estudiar la derivada temporal.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV = \int_V (\epsilon \mathbf{E} \dot{\mathbf{E}} + \mu \mathbf{H} \dot{\mathbf{H}}) dV = \int_V (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}) dV \quad (5.63)$$

donde el punto sobre los vectores indica su derivada respecto al tiempo. Estas derivadas temporales se pueden eliminar mediante las ecuaciones de Maxwell, resultando entonces

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H} - \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle), \quad (5.64)$$

$$\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}). \quad (5.65)$$

Sustituyendo en dW/dt y teniendo en cuenta que $\mathbf{E}(\nabla \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\nabla(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$ se obtiene

$$\frac{dW}{dt} = - \int \mathbf{j}_{lib} \mathbf{E} dV - \int \nabla(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) dV, \quad (5.66)$$

y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss al segundo sumando obtenemos

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \mathbf{j}_{lib} \mathbf{E} dV - \oint_S (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) d\mathbf{S}. \quad (5.67)$$

donde $d\mathbf{S}$ es un vector normal al elemento de superficie dS y dirigido hacia el exterior. Esta ecuación es la generalización del denominado *teorema de Poynting para medios materiales*. Como en el caso del vacío, el primer término es la cantidad de energía almacenada en el volumen V . El segundo término indica que parte de esta energía se transforma en calor debido al efecto Joule. El último término indica que parte de la energía electromagnética almacenada se escapa a través de las paredes que rodean volumen. Esto nos da idea que una onda transporta energía en su propagación. Es necesario cuantificar la energía que una onda transporta. Para ello se define el *vector de Poynting para medios materiales* como

$$\boxed{\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}}, \quad (5.68)$$

donde $[\mathbf{S}] = W/m^2$. El vector de Poynting describe un flujo de energía (energía por unidad de tiempo y superficie), y coincide con la magnitud *irradiancia* de la óptica geométrica.

Para el caso del promedio temporal para ondas armónicas resulta que el vector de Poynting es

$$\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t) \}. \quad (5.69)$$

Recordamos que para ondas no armónicas, no es posible obtener una expresión explícita. Al particularizar la expresión hallada para la onda armónica plana

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \wedge \mathbf{H}_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right\} \quad (5.70)$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\boxed{\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k}. \quad (5.71)$$

Obviamente toda la formulación para medios materiales coincide para el vacío simplemente considerando $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$.

CONCLUSIONES

- Cuando la luz atraviesa un medio material, muchas veces se puede considerar que ve un continuo de materia y no una distribución discreta de átomos.

- La materia interactúa con la luz, modificando el campo electromagnético. Si esta interacción es lineal (la mayoría de los casos) las ecuaciones se simplifican.
- Para el casos de ondas armónicas, las ecuaciones de Maxwell se simplifican si consideramos un nuevo parámetro, la constante dieléctrica generalizada. Los medios materiales se pueden clasificar según este parámetro.
- Se puede obtener de forma sencilla la energía en el medio material mediante una nueva definición del vector de Poynting.

PROPAGACIÓN EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPAS

Del tratamiento macroscópico-estadístico realizado en el Capítulo 5 se deriva que las propiedades ópticas de los medios materiales densos se pueden sintetizar en un único parámetro, la constante dieléctrica generalizada, ϵ_{gen} . Así, las ecuaciones de Maxwell para medios materiales homogéneos e isotrópicos son formalmente equivalentes a las utilizadas para el vacío. En este tema se analizará cómo deben ser las ondas electromagnéticas que se propagan en medios homogéneos e isotrópicos en función de las propiedades de los materiales. Veremos que, a partir de la constante dieléctrica generalizada, podemos definir *un parámetro óptico, el índice de refracción que compendia el comportamiento de la luz en la materia*.

Índice

6.1	Índice de refracción y vector de ondas complejos	80
6.2	Medios transparentes	82
6.3	Medios absorbentes	83
6.3.1	Vectores k y a paralelos	84
6.3.2	Vectores k y a no paralelos	85

OBJETIVOS

- Describir la propagación de ondas armónicas planas en medios materiales.
- Saber que el índice de refracción es un parámetro óptico que condensa de forma sencilla la información del comportamiento de la luz en la materia.
- Conocer el comportamiento de la luz en medios dieléctricos y conductores.

Referencias generales:

- M. Cabrera, F. J. López y F. Agulló. Óptica Electromagnética (vol 1. Fundamentos) Addison-Wesley Iberoamericana, 2a ed. (1998) – capítulos 6 y 7

ÍNDICE DE REFRACCIÓN Y VECTOR DE ONDAS COMPLEJOS

Según el modelo macroscópico anteriormente definido, para las ondas armónicas, las ecuaciones de Maxwell que rigen el comportamiento de la luz en dicho medio son (5.55-5.58)

$$\varepsilon_{gen} \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.1)$$

$$\mu \nabla \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - i\omega\mu\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + i\omega\varepsilon_{gen}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (6.4)$$

donde $\varepsilon_{gen} = \varepsilon + i\sigma/\omega$ es la constante dieléctrica generalizada que, para el caso particular de homogeneidad e isotropía, no depende de la posición y es un escalar. Esta ecuación es formalmente muy similar a las ecuaciones de Maxwell para el vacío, excepto que $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_{gen}$ y $\mu_0 \rightarrow \mu$. No obstante, existe una diferencia importante puesto que dichos parámetros pueden ser números complejos y tener una cierta dependencia con la frecuencia.

Consideremos ahora una onda armónica de frecuencia ω que se propaga por dicho homogéneo e isotrópico. Como consecuencia de la similitud formal existente en las ecuaciones se propone como solución a las ecuaciones las siguientes funciones de prueba

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)},} \quad (6.5)$$

donde \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 , \mathbf{k}_c y ω son constantes. Debemos ahora determinar qué relación hay entre los parámetros materiales, ε_{gen} y μ , con los parámetros de la onda, \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 y \mathbf{k}_c para que dicha solución propuesta cumpla las ecuaciones de Maxwell en la materia.

Introduciendo la propuesta de solución para los campos eléctrico y magnético se obtiene que las ecuaciones de Maxwell se convierten en

$$\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{\varepsilon_{gen}\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{H}_0. \quad (6.9)$$

Para interpretar estas ecuaciones, vamos a relacionar el vector \mathbf{k}_c con los parámetros μ , ε_{gen} y ω . Combinando las dos últimas ecuaciones, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\frac{1}{\varepsilon_{gen}\omega} \mathbf{k}_c \wedge \left(\frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0 \right) \\ &= -\frac{1}{\mu\varepsilon_{gen}\omega^2} (\mathbf{k}_c \wedge \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0) \\ &= -\frac{1}{\mu\varepsilon_{gen}\omega^2} [\mathbf{k}_c (\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{k}_c)] \\ &= \frac{1}{\mu\varepsilon_{gen}\omega^2} \mathbf{k}_c^2 \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde hemos utilizado la relación $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Comparando ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\mathbf{k}_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{gen}. \quad (6.11)$$

Por similitud con el caso del vacío (1.40), donde $|\mathbf{k}|^2 = \omega^2 / c^2 = k_0^2$, vamos a definir el *índice de refracción* como la relación entre los vectores de onda en el medio y en el vacío

$$\mathbf{k}_c^2 = k_0^2 n_c^2. \quad (6.12)$$

De esta forma, el índice de refracción se define como

índice de refracción

$$n_c^2 = c^2 \mu \varepsilon_{gen} = \frac{\mu \varepsilon_{gen}}{\mu_0 \varepsilon_0}. \quad (6.13)$$

Utilizando la definición (5.54), $\varepsilon_{gen} = \varepsilon + i\sigma/\omega$, se obtiene la relación de dispersión, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$,

$$\mathbf{k}_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon + i\omega \mu \sigma. \quad (6.14)$$

Hay que considerar también que los parámetros μ , ε y σ pueden tener también una dependencia con la frecuencia angular ω .

relación de dispersión

La constante dieléctrica generalizada, y por ello \mathbf{k}_c , pueden ser números complejos cuando el medio es conductor. Entonces, el índice de refracción será complejo. Debido a la definición del campo eléctrico dentro del medio material (6.5), $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, como tanto el vector de ondas como el índice de refracción son (pueden ser) complejos, podemos describirlo de la siguiente forma

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k} + i\mathbf{a}, \quad (6.15)$$

$$n_c = n + i\kappa, \quad (6.16)$$

donde \mathbf{k} , \mathbf{a} , n y κ son números reales, que reciben los nombres respectivos de *vector de ondas*, *vector de atenuación*, *índice de refracción* e *índice de absorción*. Entonces la expresión de la onda armónica “plana” (6.5) resulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (6.17)$$

La amplitud $\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}$ es una función exponencial negativa, por lo que disminuye con la propagación, tanto más cuanto mayor es el vector de atenuación \mathbf{a} . De la relación dada en (6.12), introduciendo las definiciones

$$(\mathbf{k} + i\mathbf{a})^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n + i\kappa)^2, \quad (6.18)$$

y separando las partes reales e imaginarias se pasa fácilmente a

$$\mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2), \quad (6.19)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n \kappa. \quad (6.20)$$

que forman las condiciones que buscábamos para conocer los módulos de \mathbf{k} y \mathbf{a} en función de los parámetros del índice de refracción n y κ .

DOS COMENTARIOS

- No deberíamos llamar ondas *planas* a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.22)$$

porque no lo son. En general \mathbf{k} y \mathbf{a} no son paralelos y por lo tanto, $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t)$. Deberíamos llamarlas *ondas planas inhomogéneas*: los planos de amplitud constante no coinciden con los planos de fase constante. Por lo tanto, cuando las llamemos onda armónica plana, estamos abusando del lenguaje (aunque lo haremos).

- A partir de la estructura de la onda que hemos encontrado al principio del capítulo, es tentador pensar que $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{k}_c)$ forman un triedro ortogonal. No es así, ya que intervienen vectores complejos.

MEDIOS TRANSPARENTES

Los medios transparentes son aquellos que no presentan absorción, por lo que ε_{gen} es real. Entonces sucede $\kappa = 0$, y se verifican las relaciones

$$\mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2. \quad (6.23)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (6.24)$$

Como \mathbf{k} no es nunca nulo surgen dos casos para que se cumpla la segunda igualdad: o bien $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, o bien $\mathbf{a} \perp \mathbf{k}$.

- $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. La onda es plana y los vectores \mathbf{k} , \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí, como en el vacío, por lo que en esta ocasión sí forman un triedro ortogonal. Pero hay diferencias importantes respecto al vacío, Figura 6.1. La longitud de onda cambia

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{\lambda_{medio}} = \frac{2\pi}{\lambda_{vacio}} n = |\mathbf{k}_0| n, \quad (6.25)$$

con lo que $\lambda_{medio} = \lambda_{vacio} / n$. También cambia la velocidad de fase

$$|\mathbf{k}| z - \omega t = cte, \quad (6.26)$$

$$v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{n}, \quad (6.27)$$

de forma que, bajo la presencia de materia la onda se ralentiza. Esto es debido a que en el proceso de emisión - esparcimiento la luz se entretiene, como hemos visto en el Capítulo 4. En este caso, la onda se escribe como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(n \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(n \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (6.28)$$

- Esta última relación es utilizada en algunos libros de óptica geométrica para definir el índice de refracción. Es de notar que en el índice de refracción normalmente dependerán de la frecuencia, es decir, en general los medios son dispersivos, $n = n(\omega)$.
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{k}$. Se analizará con más detalle en el Capítulo 8. Sin pérdida de generalidad, escribamos $\mathbf{k} = k \mathbf{u}_x$ y $\mathbf{a} = a \mathbf{u}_z$, Figura 6.2. Entonces $\mathbf{k}_c = k \mathbf{u}_x + i a \mathbf{u}_z$ y la onda resulta

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-az} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (6.29)$$

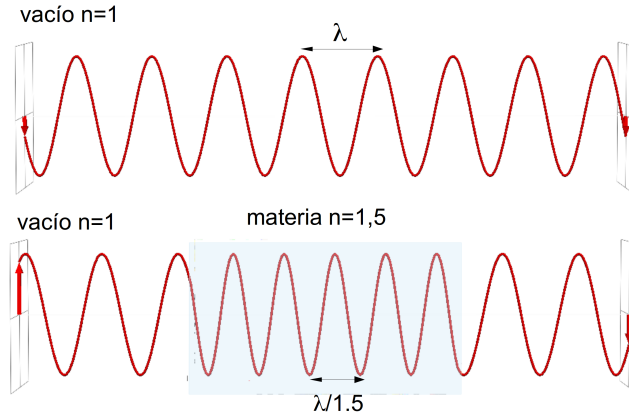


Figura 6.1: Comparación de una onda que se transmite en el vacío y en un medio transparente. (a) Propagación en el vacío (b) Propagación en un medio transparente. y en un medio transparente. En el medio, la fase se comprime y la amplitud se mantiene. Se produce una variación en la fase entre ambas ondas después de pasar por el medio

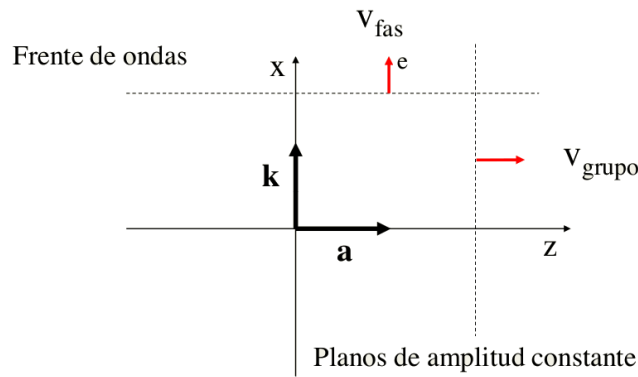


Figura 6.2: Planos de misma amplitud y de misma fase, y velocidad de propagación.

La onda es armónica pero no plana. Los puntos con igual amplitud se sitúan sobre planos perpendiculares al eje z . Los frentes de onda (superficies de igual fase) son planos perpendiculares al eje x .

De los resultados obtenidos no podemos precisar más. No podemos decir qué ángulo forma \mathbf{E} con \mathbf{k} o \mathbf{a} . Sólo podemos decir que $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. La importancia de esta solución se debe a que la veremos en el marco de reflexión-refracción como onda reflejada.

MEDIOS ABSORBENTES

En los medios absorbentes ocurre que $\kappa \neq 0$, por lo la atenuación \mathbf{a} no será nula. Entonces, según (6.19)

$$\mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2),$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa,$$

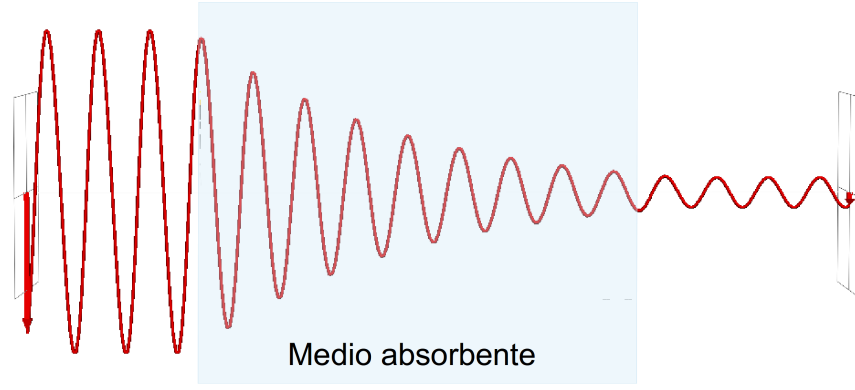


Figura 6.3: . Comportamiento de la onda al pasar por un medio absorbente.

no se puede eliminar el término κ . Por consiguiente, el vector de atenuación \mathbf{a} no puede desaparecer y el vector de ondas es complejo,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (6.30)$$

Los parámetros n y κ tienen siempre el mismo signo y, por consiguiente,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n \kappa > 0. \quad (6.31)$$

Esto significa que la onda se atenúa, pierde energía según se propaga. Un ejemplo de medio absorbente es el de los metales. Con los valores de κ en metales comunes ($\kappa \sim 3$) la onda se extingue al cabo de pocas longitudes de onda.

Vectores \mathbf{k} y \mathbf{a} paralelos

Supongamos que $\mathbf{k} \parallel \mathbf{a}$ y que, sin pérdida de generalidad, se propagan paralelos a z . Entonces podemos resolver las ecuaciones anteriores resultando

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \\ |\mathbf{a}| &= \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

A partir de este resultado podemos obtener dos conclusiones interesantes. El campo eléctrico se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-|\mathbf{a}|z} e^{i(|\mathbf{k}|z - \omega t)} \quad (6.33)$$

y la velocidad de fase resulta

$$v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1} \right)^{1/2}. \quad (6.34)$$

La velocidad de fase de la onda disminuye en un medio conductor respecto de uno con igual constante dieléctrica. La longitud de onda se puede calcular a partir de $\lambda = 2\pi / |\mathbf{k}| = 2\pi v_f / \omega$

Debido a la exponencial compleja podemos ver que la onda electromagnética disminuye su potencia al propagarse (transfiriendo esta energía por efecto Joule). Un parámetro de interés es la profundidad de penetración, que es la distancia en la que la amplitud disminuye un factor $1/e \approx 0,3678$. Esta distancia de penetración es igual a

$$\delta = 1/|\mathbf{a}| = \lambda_{vacio}/(2\pi\kappa). \quad (6.35)$$

profundidad de penetración

Para conductores con una conductancia muy grande $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ se tiene que $\epsilon_{gen} \simeq i\sigma/\omega$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &\simeq 0, \\ 2n\kappa &\simeq \frac{\sigma}{\omega}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

y se obtiene que

$$n \simeq \kappa \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega}}. \quad (6.37)$$

Además, vemos que $|\mathbf{k}| \simeq |\mathbf{a}| \simeq \sqrt{\mu\omega\sigma/2}$. A su vez, para este caso particular

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{|\mathbf{a}|} = \frac{\lambda_0}{\pi} \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2\sigma}}, \\ n_c &= n + i\kappa = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}}(1 + i) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Vectores \mathbf{k} y \mathbf{a} no paralelos

En el caso general el vector de ondas \mathbf{k} y el vector de atenuación \mathbf{a} no tienen que ser paralelos, $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{a}$. Como se sigue en consideración la ecuación

$$n \geq 0, \kappa \geq 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{c^2} \kappa n > 0, \quad (6.39)$$

por lo que tanto n como κ tienen el mismo signo. En este caso general, las superficies de amplitud constante son perpendiculares al vector \mathbf{a} y las de fase constante, al vector \mathbf{k} . El vector \mathbf{a} siempre tiene cierta componente en la dirección del vector \mathbf{k} , lo que se traduce en que la onda se atenúa conforme se propaga por el medio material debido a una cierta atenuación de la amplitud en la dirección de propagación de dicha onda.

CONCLUSIONES

- El parámetro fundamental para caracterizar la materia es el índice de refracción.
- En los medios transparentes tenemos dos situaciones. La primera es similar a la propagación en el vacío, pero la materia modifica el módulo del vector de ondas. En la segunda la amplitud y la fase se propagan en direcciones normales.
- En los medios conductores el índice de refracción es complejo. Esto hace que la amplitud del campo disminuye exponencialmente al propagarse, lo que significa que tenemos absorción.
- En la materia, la longitud de onda de la luz es menor que en el vacío.

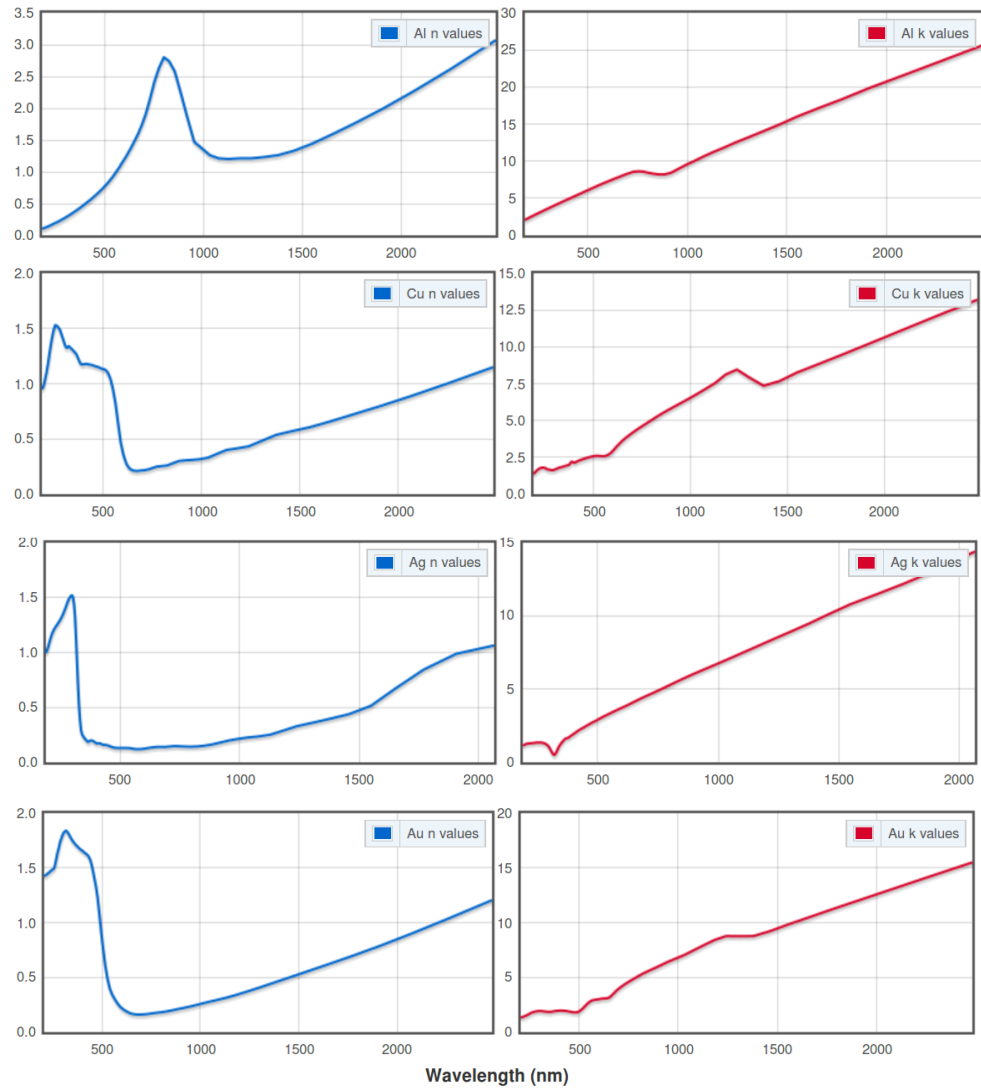


Figura 6.4: Medidas experimentales del índice de refracción de varios metales, según <http://www.filmetrics.com/refractive-index-database>.

MODELO MICROSCÓPICO DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Se combinan los conocimientos microscópicos de la interacción radiación-materia con el modelo macroscópico de las ecuaciones de Maxwell. De esta forma se relacionan los parámetros macroscópicos que definen la materia, como el índice de refracción, la susceptibilidad eléctrica y la conductividad eléctrica, con los parámetros microscópicos, tales como la densidad de electrones y las frecuencias de resonancias. Se verán expresiones aproximadas sencillas para la caracterización del índice de refracción. En medios conductores introduciremos el efecto de las cargas libres desde el punto de vista microscópico, considerando que el electrón oscila libremente como si estuviera en un fluido viscoso. Esto nos permitirá obtener la contribución de las cargas libres al índice de refracción complejo. Finalmente, estudiaremos el concepto de frecuencia de plasma.

Índice

7.1	Constante dieléctrica microscópica	88
7.1.1	Contribución de las cargas ligadas	88
7.1.2	Contribución de las cargas libres	90
7.2	Índice de refracción	91
7.2.1	Índice de refracción de medios dieléctricos	92
7.2.2	Ecuaciones de Sellmeier y Cauchy	95
7.3	Índice de refracción de medios conductores	98

OBJETIVOS

- Saber relacionar los parámetros macroscópicos con el comportamiento microscópico de la materia.
- Determinar las características del índice de refracción en función de los parámetros microscópicos del material.
- Conocer las expresiones simplificadas mas habituales para la caracterización del índice de refracción de un medio.

REFERENCIAS GENERALES:

- J.M. Cabrera, F.J. López, F. Agulló "Óptica electromagnética, vol. 1: Fundamentos" Addison-Wesley 1998, cap: 8

CONSTANTE DIELECTRICA MICROSCÓPICA

Desde el punto de vista macroscópico hemos definido el índice de refracción complejo de un medio material, n_c , como (6.13)

$$n_c^2 = \frac{\varepsilon_{gen}\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \equiv (n + i\kappa)^2 = (n^2 - \kappa^2) + 2in\kappa, \quad (7.1)$$

donde n es el índice de refracción y κ es el índice de absorción. Estudiaremos ahora la relación existente entre índice de refracción y las propiedades microscópicas del material. El índice de refracción es una función observable y dependerá de parámetros que nos informan sobre la naturaleza microscópica del material $n_c(\omega, \omega_0, \text{densidad}, \gamma, \dots)$. Vamos a abordar una situación bastante simple, como son los medios isótropos, no magnéticos ($\mu \simeq \mu_0$) y no polares (no consideraremos momentos dipolares permanentes). Por tanto, el índice de refracción es simplemente la relación entre la constante dieléctrica generalizada y la del vacío

$$n_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_{gen}}{\varepsilon_0}}. \quad (7.2)$$

Para obtener el índice de refracción en función de los parámetros microscópicos tengamos en cuenta (7.2), generada para el modelo macroscópico

$$\varepsilon_{gen} = \varepsilon + \frac{i}{\omega}\sigma. \quad (7.3)$$

Por consiguiente, el cálculo del índice de refracción se reduce al cálculo de ε_{gen} con $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$. Para ello analizaremos por separado la contribución de las cargas ligadas y las cargas libres.

Contribución de las cargas ligadas

El vector de polarización, proporcional al campo eléctrico macroscópico, resulta ser

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}_{mac}, \quad (7.4)$$

donde hemos recuperado el subíndice $_{mac}$. Por definición, el momento dipolar por unidad de volumen resulta

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \mathbf{r}_j. \quad (7.5)$$

Vamos a calcular la constante de proporcionalidad $\varepsilon_0\chi_e$ a partir de las relaciones microscópicas. Para un único átomo, la ecuación de la trayectoria de la carga ligada excitada por una onda armónica plana es (4.20)

$$\mathbf{r} = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_{mic}. \quad (7.6)$$

Asumimos que la polarización es lineal con el campo eléctrico, $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$, donde donde α se denomina *polarizabilidad*. Comparando la polarización producida por un átomo $\mathbf{P} = q\mathbf{r}$ con $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$ se obtiene

$$\mathbf{r} = \frac{1}{q}\alpha\mathbf{E}_{mic}, \quad (7.7)$$

y, por consiguiente, la polarizabilidad resulta

$$\alpha = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (7.8)$$

La polarización total se puede calcular como la suma sobre todos los átomos

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \alpha_j \mathbf{E}_{mic,j}. \quad (7.9)$$

De momento, vamos a suponer que todos los átomos son iguales, lo que implica que tienen la misma polarizabilidad

$$\mathbf{P} = \alpha \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{E}_{mic,j}. \quad (7.10)$$

Para calcular $\mathbf{E}_{mic,j}$ introducimos N , el número de átomos, en ΔV ,

$$\mathbf{P} = \alpha \frac{N}{\Delta V} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_{mic,j}}. \quad (7.11)$$

Definimos $N_V = N/\Delta V$ al número de átomos por unidad de volumen. La cantidad señalada con una llave se parece mucho al campo macroscópico \mathbf{E}_{mac} , pero en general no coincide con él. Esto es debido a que el campo macroscópico lo definiríamos como integral a un volumen, y el promedio que hacemos aquí es sólo sobre *los átomos* contenidos en el volumen. El campo macroscópico se calcula también sobre *los espacios* entre átomos. Una aproximación más rigurosa, válida para densidades mayores de átomos, es la ecuación de Clausius-Mossotti

deriva en la relación de Clausius-Mossotti

$$\mathbf{P} = \alpha N_V (\mathbf{E}_{mac} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}), \quad (7.12)$$

donde se considera que un átomo polarizado genera un campo eléctrico que, a su vez, produce una polarización en sentido contrario en el entorno, que para los cálculos se considera isótropo.

A partir de la expresión $\frac{1}{N} \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{E}_{0,j} e^{-i\omega t} \approx \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{3\epsilon_0} \langle \mathbf{P} \rangle$ se demuestra la relación de Clausius-Mossotti para dieléctricos no magnéticos ($\mu = \mu_0$)

Partimos de la ecuación que relaciona polarización con promedio del campo

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{N\alpha}{\Delta V \epsilon_0} \frac{1}{N} \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{E}_{0,j} e^{-i\omega t} \approx \frac{N\alpha}{\Delta V \epsilon_0} \left(\langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{3\epsilon_0} \langle \mathbf{P} \rangle \right). \quad (7.13)$$

Despejando la polarización se obtiene

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{3\eta}{1-\eta} \epsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (7.14)$$

donde, para abreviar, $\eta = N_V \alpha / (3\epsilon_0)$. Ya podemos obtener χ_e , que resulta

$$\chi_e = \frac{3\eta}{1-\eta}. \quad (7.15)$$

Finalmente como $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$, entonces obtenemos

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{3\eta}{1-\eta} = \frac{1+2\eta}{1-\eta}. \quad (7.16)$$

De aquí se obtiene directamente se comprueba directamente que ¹

$$\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} = \eta = \frac{N_V \alpha}{3\varepsilon_0}. \quad (7.17)$$

No obstante, se suele simplificar la relación de Clausius–Mossotti, cuando la densidad de átomos es pequeña, $N_V \alpha / \varepsilon_0 \ll 1$, lo que ocurre en los gases a baja presión, se puede aproximar mediante un desarrollo en series, resultando

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{1 + 2\eta}{1 - \eta} \approx (1 + 2\eta)(1 + \eta) \approx 1 + 3\eta = 1 + N_V \frac{\alpha}{\varepsilon_0}. \quad (7.18)$$

Esta expresión se obtiene cuando en (7.12) despreciamos la interacción entre átomos, de forma que se puede identificar \mathbf{E}_{mic} y \mathbf{E}_{mac}

$$\mathbf{P} = \alpha N_V \mathbf{E}_{mac}. \quad (7.19)$$

Para este caso, relacionando (7.4) y (7.19) junto con $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$, se puede escribir, al ser $\varepsilon_0 \chi_e = N_V \alpha$,

$$\varepsilon / \varepsilon_0 = 1 + N_V \frac{\alpha}{\varepsilon_0} = 1 + N_V \frac{q^2 / (m\varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (7.20)$$

Esta expresión relaciona la constante dieléctrica con los parámetros microscópicos del medio, y admite una generalización si consideramos que los átomos son de diferente tipo (ω_{0j} , γ_j varían de átomo a átomo). Volviendo al sumatorio (7.11), que es la definición de \mathbf{P} , y reconstruyendo para diferentes átomos con densidades $N_{V,j}$, se obtiene

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \sum_j N_{V,j} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right). \quad (7.21)$$

Considerando la proporción de átomos respecto del total, $f_j = N_{V,j} / N_V$ la expresión final resulta

*las cargas ligadas
también contribuyen
a la parte compleja
del índice de
refracción (cerca de
las resonancias)*

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{N_V q^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right). \quad (7.22)$$

donde q y m son comunes a todos los átomos y $\sum f_j = 1$.

Contribución de las cargas libres

Para obtener el término de contribución de las cargas libres a la constante dieléctrica generalizada necesitamos calcular la conductividad. Partiremos de la relación macroscópica para la conductividad

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma \mathbf{E}_{mac}, \quad (7.23)$$

siendo nuestro objetivo escribir la conductividad en función de la dinámica microscópica de las cargas. Promediamos a un volumen pequeño frente a la longitud

¹ Normalmente se obtiene a partir de los índices de refracción: $\frac{n_e^2 - 1}{n_e^2 + 2} = \frac{N_V \alpha}{3\varepsilon_0}$.

de onda pero lo suficientemente grande como para contener un alto número de cargas. Entonces resulta la expresión, por la definición de corriente de cargas libres

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}. \quad (7.24)$$

Derivando la posición \mathbf{r}_j (7.6), pues este estudio es para ondas armónicas, y considerando $\omega_0 = 0$, pues son cargas libres, resulta

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma \mathbf{E}_{mac} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{q^2}{m} \frac{i}{\omega + i\gamma} E_{mic,j}, \quad (7.25)$$

donde q aparece sin índice alguno porque se trata siempre de electrones, todos idénticos. Al igual que para las cargas ligadas, introducimos un número de cargas libres por unidad de volumen, N'_V ,

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{q^2}{m} \frac{i}{\omega + i\gamma} \frac{N'}{\Delta V} \underbrace{\frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} E_{mic,j}}. \quad (7.26)$$

La cantidad señalada, por razones ya discutidas, no es el campo macroscópico estrictamente, pero constituye una aproximación razonable cuando las cargas libres están tan dispersas que el sumatorio es buena aproximación numérica de la integral que se debería hacer en su lugar. Por ello

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{q^2}{m} \frac{i}{\omega + i\gamma} N'_V \mathbf{E}_{mac}, \quad (7.27)$$

con lo que la conductividad queda entonces

$$\sigma = i N'_V \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega + i\gamma}. \quad (7.28)$$

ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Con los resultados anteriores podemos escribir el comportamiento del índice de refracción $n_c^2 = (n + i\kappa)^2 = \varepsilon_{gen}/\varepsilon_0$ utilizando parámetros microscópicos. Introduciendo (7.22) y (7.28) en (7.3), $\varepsilon_{gen} = \varepsilon + i\sigma/\omega$, obtenemos²

$$n_c^2 = 1 + N_V \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0,j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} - N'_V \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (7.29)$$

Para obtener los valores de n y κ hay que separar la parte real de la imaginaria. La ecuación (7.29) permite obtener varias conclusiones respecto al índice de refracción:

- El índice de refracción depende de la frecuencia. Por ello, tanto los medios dieléctricos como conductores van a ser dispersivos.
- Existe una parte compleja del índice de refracción tanto para el caso de cargas ligadas como de cargas libres. Esto significa que los medios materiales, al menos en alguna parte del espectro, son siempre absorbentes.

² la contribución de las cargas libres tiene un signo negativo debido a la multiplicación de 2 exponenciales complejas.

- Esta fórmula también contempla la posibilidad de medios inhomogéneos, a través de una dependencia espacial de las densidades de cargas libres y ligadas, N'_V y $N_V \rightarrow N'_V(\mathbf{r})$ y $N_V(\mathbf{r})$.

Índice de refracción de medios dieléctricos

Para un medio dieléctrico sólo tenemos la primera contribución, ya que no hay cargas libres,

$$n_c^2 = 1 + N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}. \quad (7.30)$$

Como hemos visto, expresión proviene de aproximar el campo eléctrico macroscópico por un sumatorio, por lo que $N_V\alpha/\epsilon_0 \ll 1$ (normalmente gases diluidos). El cálculo del índice de refracción n_c simplemente se obtiene haciendo la raíz cuadrada

$$n_c = \sqrt{1 + N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}}. \quad (7.31)$$

Debido a que el segundo término es pequeño, se puede utilizar la aproximación lineal de la raíz cuadrada $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, de forma que

$$n + i\kappa \approx 1 + N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}. \quad (7.32)$$

De esta ecuación se puede extraer la parte real y la imaginaria multiplicando arriba y abajo por el complejo conjugado del denominador. De esta forma resulta

$$n = 1 + N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}, \quad (7.33)$$

$$\kappa = N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j \gamma_j \omega}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}. \quad (7.34)$$

Al aumentar la densidad del medio los índices de refracción y de absorción aumentan de forma lineal. La parte imaginaria κ es prácticamente nula a no ser que estemos en las proximidades de las frecuencias resonantes, zonas denominadas *bandas de absorción*, Figura 7.1.

Veamos qué le ocurre al índice de refracción complejo cerca de la zona de resonancia. En la Figura 7.1 se muestra n y κ para uno de los picos, en función de la frecuencia de la luz incidente. La anchura del pico de κ es proporcional a γ . Una primera conclusión importante es que no existen medios transparentes o absorbentes en todo el espectro electromagnético. Siempre que haya una frecuencia de resonancia, el índice de absorción se hace significativamente alto. Los vidrios de ventana por ejemplo son muy opacos al ultravioleta.

En la zona de transparencia, donde κ es prácticamente nulo, el índice de refracción es creciente con la frecuencia de la luz incidente (decreciente con la longitud de onda). A este comportamiento se le denomina dispersión normal. Por otro lado, en la zona de resonancia, el índice de refracción decrece de forma abrupta. A este comportamiento se denomina dispersión anómala, y es más complicado de observarla pues el medio es absorbente para estas frecuencias.

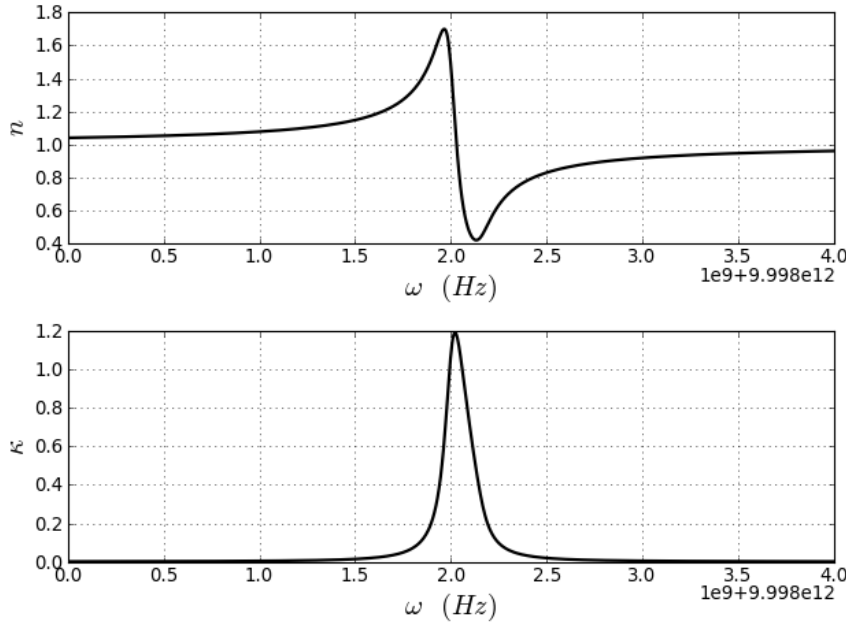


Figura 7.1: Índice de refracción $n(\omega)$ (arriba) y coeficiente de absorción $\kappa(\omega)$ (abajo) para el caso de $N_v = 10^{18} \text{ e}^-/\text{m}^3$, $\omega_0 = 10^{13} \text{ Hz}$, y $\gamma = 10^8 \text{ Hz}$. Se observa la zona de absorción como un pico estrecho y la zona de absorción anómala justo en dicha zona de absorción.

Como se muestra en la Figura 7.1, para frecuencias mayores que la de resonancia ($\omega > \omega_0$) el índice de refracción es menor que 1, $n < 1$ lo que clásicamente se interpreta como que la velocidad de fase es mayor que c .

Para átomos aislados (sin interacciones con el entorno) los picos son muy estrechos. Si empezamos a considerar medios más densos (gases a presión creciente) la anchura de las bandas crece. Las bandas pueden estar próximas, y si es así, se superponen muchos picos para dar lugar a una verdadera banda ancha que puede cubrir todo el visible. En general, las bandas de absorción de una mezcla de gases son la superposición de las bandas de absorción individuales (Figura 7.3).

En un medio denso donde no se puede hacer la aproximación de que no hay interacción dipolar, el dipolo sufre una gran interacción con el medio ambiente dando como resultado la absorción en muchas más frecuencias; ensanchamiento de la zona de absorción.

Como vemos, se puede obtener información sobre la materia estudiando cómo se propaga la luz en ella. El análisis espectral de una sustancia nos indica sus frecuencias de resonancia, y la anchura de las líneas de absorción nos da información sobre los parámetros γ . Las zonas donde κ vale cero son de transmisión perfecta, sin absorción.

Como se muestra en la Figura 7.3 para un medio material, que normalmente tiene varias frecuencias de resonancia, el índice de refracción es mayor a bajas frecuencias. En el límite de frecuencias muy altas, rayos x, el índice de refracción es el del vacío. A frecuencias mayores que la mayor de resonancia, el medio se vuelve transparente y la onda no interactúa con él.

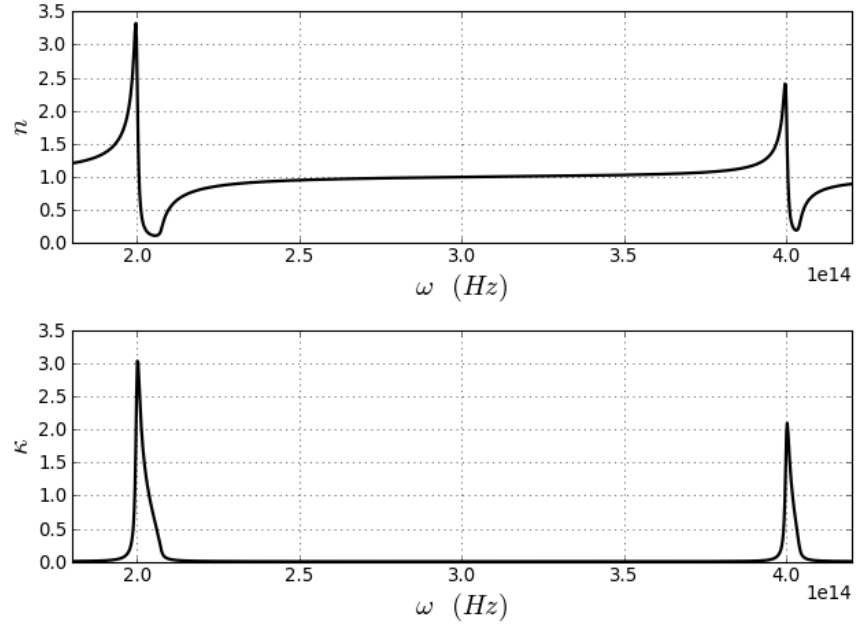


Figura 7.2: Índice de refracción $n(\omega)$ (arriba) y coeficiente de absorción $\kappa(\omega)$ (abajo) para el caso de $N_v = 10^{18}$, $\omega_0 = 10^{13}$ Hz, y $\gamma = 10^8$ Hz. Se observa la zona de absorción y la zona de absorción anómala justo en dicha zona de absorción

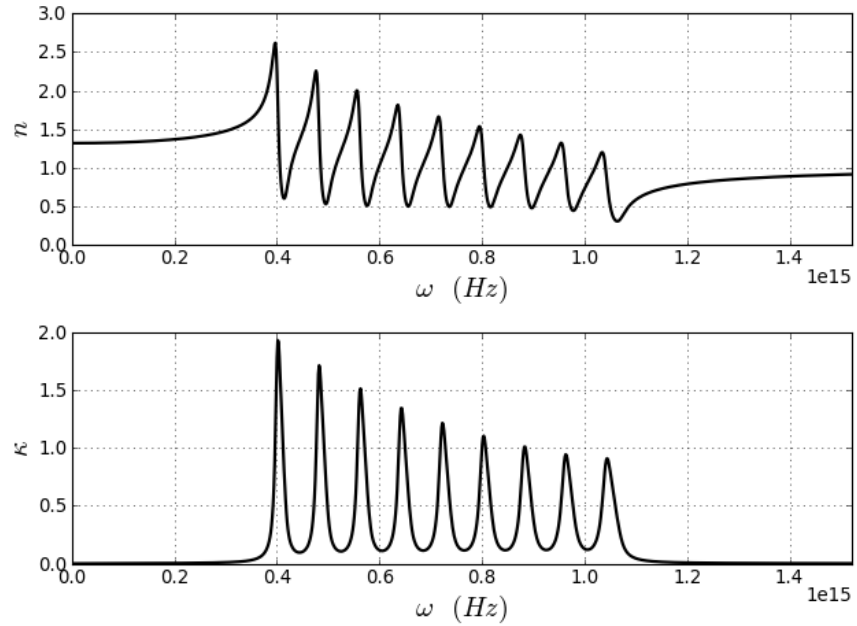


Figura 7.3: Índice de refracción $n(\omega)$ (arriba) y coeficiente de absorción $\kappa(\omega)$ (abajo) para el caso de muchas resonancias. Se observa que para bajas frecuencias el índice de refracción (índice de refracción estático) es mayor que 1, mientras que para altas frecuencias tiende a la unidad. Es decir, para frecuencias mayores a las de resonancia, la luz no observa la materia.

Ecuaciones de Sellmeier y Cauchy

La mayoría de las veces en óptica, nos interesan las zonas de transparencia. Hemos visto que aquí el índice de refracción no es constante, sino existe siempre una cierta dependencia con la frecuencia. Veamos ahora cómo se comporta el índice de refracción en las zonas alejadas a las de resonancia, es decir, en estas zonas de transparencia. En Óptica, la dispersión cromática se suele analizar en función de la longitud de onda λ en lugar de la frecuencia ω , ya que es un parámetro más utilizado. Como hemos visto anteriormente, el índice de refracción para un medio dieléctrico resulta

$$n_c^2 = 1 + N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}. \quad (7.35)$$

Para la zona de transparencia, lejos de la zona de resonancia, se puede despreciar el término complejo $\gamma\omega$. Esto hace que todos los términos sean reales. Introduciendo la relación $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$, el índice de refracción resulta

$$\begin{aligned} n_c^2 - 1 &\approx N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} = \\ &= N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi c)^2} \sum_j f_j \frac{\lambda^2 \lambda_{0j}^2}{\lambda^2 - \lambda_{0j}^2} \end{aligned} \quad (7.36)$$

La dispersión de la zona de transparencia suele estar afectada únicamente por la frecuencia de resonancia más cercana. En este caso, se obtiene la denominada expresión de Sellmeier

ecuación de Sellmeier

$$n^2(\lambda) - 1 = \sum_i \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = \frac{a_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{a_2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \dots \quad (7.37)$$

En la Figura 7.4 se muestran los parámetros de Sellmeier para algunos materiales típicos y en la Figura 7.5 se muestra la variación del índice de refracción según esta aproximación para sílice y BK7.

Podemos llegar a obtener otra relación de interés práctico, denominada ecuación de Cauchy. Ahora partimos de (7.33), volviendo a realizar las aproximaciones de la zona de transparencia y una única frecuencia resonante en $\omega \ll \omega_0$,

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} n(\omega) - 1 &= N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ &\approx N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0 \omega_0^2} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \approx \\ &\approx N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0 \omega_0^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} + \dots\right). \end{aligned}$$

La expresión de Cauchy se suele expresar de la siguiente forma

ecuación de Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (7.38)$$

En la Figura 7.7 se muestran algunos ejemplos de parámetros de Cauchy.

Como hemos visto, la zona de transparencia suele estar entre dos resonancias, Figura 7.6. Entonces, podemos considerar además relaciones más complejas que incluyan los efectos de ambas.

sílice fundido:

$$\begin{aligned} a_i &= (6,96166300 \cdot 10^{-1}, 4,07942600 \cdot 10^{-1}, 8,97479400 \cdot 10^{-1}), \\ \lambda_i &= (0,0684043, 0,1162414, 9,896161) \end{aligned}$$

BK7:

$$\begin{aligned} a_i &= (1,03961212, 2,31792344 \cdot 10^{-1}, 1,01046945), \\ \lambda_i &= (0,07746418, 0,141484681, 0,17647547) \end{aligned}$$

BK7:

$$\begin{aligned} a_i &= (1,03961212, 2,31792344 \cdot 10^{-1}, 1,01046945), \\ \lambda_i &= (0,07746418, 0,141484681, 0,17647547) \end{aligned}$$

Zafiro:

$$\begin{aligned} a_i &= (1,50397590, 5,50691410 \cdot 10^{-1}, 6,59273790), \\ \lambda_i &= (0,0740298, 0,12165292, 0,07224801) \end{aligned}$$

Figura 7.4: Algunos parámetros de Sellmeier, donde λ_i está en micras .

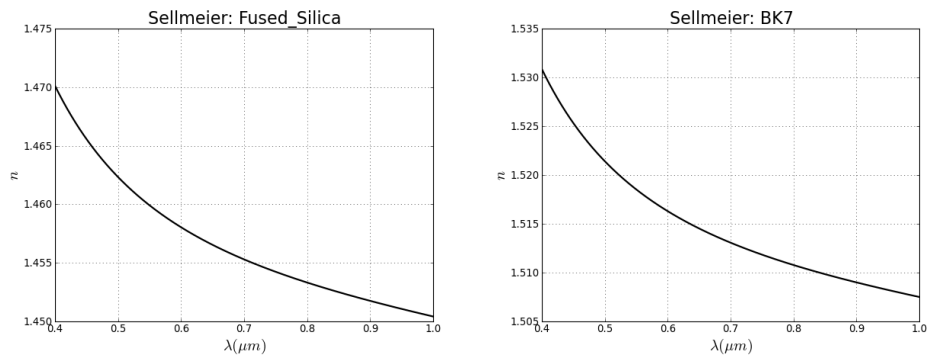


Figura 7.5: Índice de refracción para sílice fundido y BK7 según la aproximación de Sellmeier.

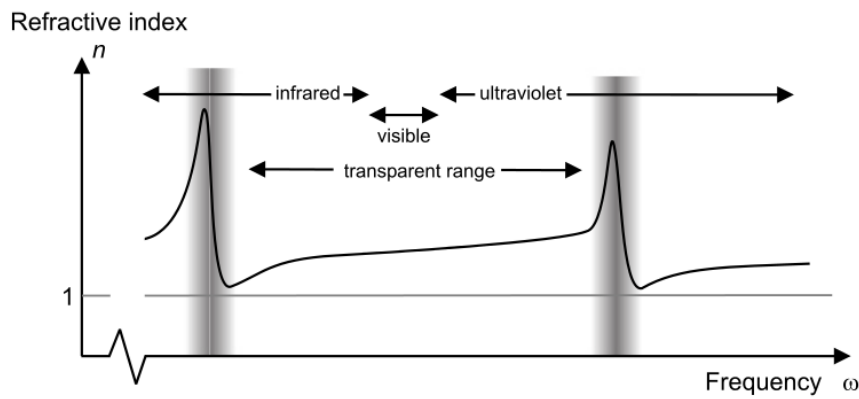


Figura 7.6: Esquema del índice de refracción respecto a la frecuencia angular. El índice de refracción en la zona de transparencias está dominado por resonancias que ocurren en el infrarrojo y en el ultravioleta.

Fused_silica=(1.4580, 0.00354 μm^2)
 Borosilicate_BK7=(1.5046, 0.00420 μm^2)
 Hard_crown_K5=(1.5220, 0.00459 μm^2)
 Barium_crown_BaK4 =(1.5690, 0.00531 μm^2)
 Barium_BaF10=(1.6700, 0.00743 μm^2)
 Dense_flint_SF10=(1.7280, 0.01342 μm^2)

Figura 7.7: Algunos parámetros de Cauchy.

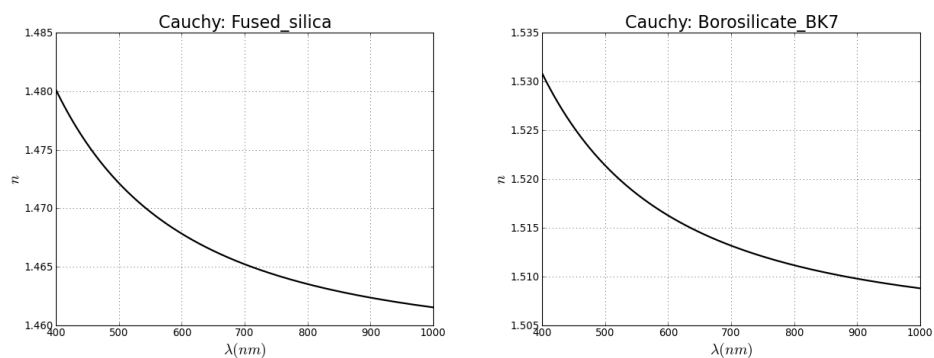


Figura 7.8: Índice de refracción para sílice fundido y BK7 según la aproximación de Cauchy.

ÍNDICE DE REFRACCIÓN DE MEDIOS CONDUCTORES

En los medios conductores tenemos cargas ligadas (electrones internos) y cargas libres. Sin embargo, éstos últimos son los que más afectan al índice de refracción. Por ello, suponemos que sólo hay cargas libres. Entonces (7.29) se simplifica a

$$n_c^2 = 1 - N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (7.39)$$

Como ejemplo, los valores microscópicos para el cobre resultan $N'_V = 8 \times 10^{28} e^- / m^3$ y $\gamma = 4 \times 10^{13} s^{-1}$. Aunque γ es mayor que antes, todavía se cumple que $\gamma \ll \omega$, con lo que es razonable realizar la siguiente aproximación

$$n_c^2(\omega) \approx 1 - N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2}, \quad (7.40)$$

que se puede simplificar a

$$n_c(\omega) \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (7.41)$$

frecuencia de
plasma

donde ω_p es la *frecuencia de plasma*

$$\omega_p = \sqrt{N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0}}. \quad (7.42)$$

Para el cobre, por ejemplo, la frecuencia de plasma es $\omega_p = 1,6 \times 10^{16} rad/s$ y corresponde al ultravioleta. El comportamiento óptico de la luz ante la presencia de conductores depende fuertemente de la relación entre la frecuencia de la luz incidente y la frecuencia del plasma.

- Cuando la frecuencia de la luz incidente es menor que la frecuencia de plasma, $\omega < \omega_p$, entonces $n_c^2 < 0$, por lo que el índice de refracción es puramente complejo, $n_c = i\kappa$. En realidad, hay una parte real, pero ha desaparecido en las aproximaciones que hemos hecho anteriormente

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}. \quad (7.43)$$

En el visible $\omega \approx 3 \times 10^{15} rad/s$, de modo que $\kappa \approx 5$ para el caso de cobre. El valor de κ es bastante grande, en consonancia con el hecho de que los metales son opacos a la radiación visible. Para este caso se obtiene un índice de refracción complejo $n_c \approx 5i$.

1. Cuando la frecuencia de la luz incidente es mayor que la frecuencia de plasma, $\omega > \omega_p$, el medio es transparente, pues el índice de refracción es real, excepto una pequeña componente imaginaria que hemos eliminado con las aproximaciones realizadas. Es por ello que para esta frecuencia, la luz no es absorbida por el plasma

$$n_c(\omega) \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (7.44)$$

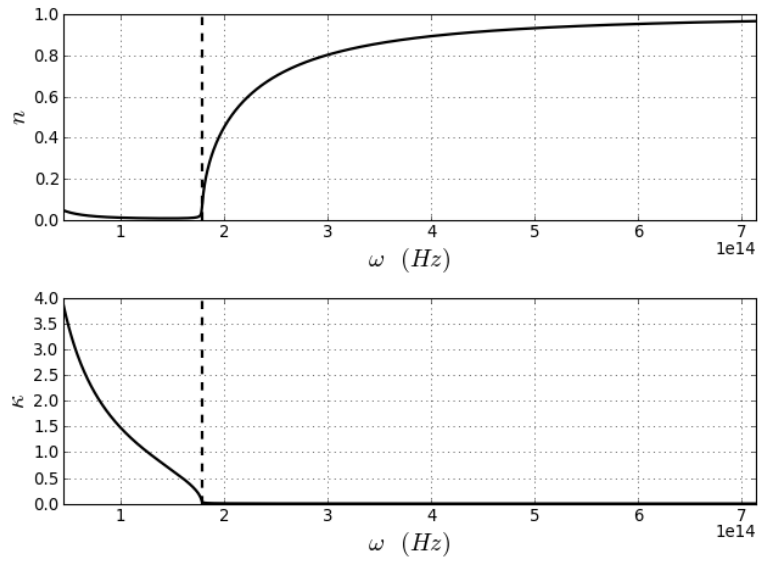


Figura 7.9: Índice de refracción para el plasma para los parámetros $Nv = 10^{25}$ y $\gamma = 10^{12}$ Hz. La línea discontinua representa la frecuencia de resonancia.

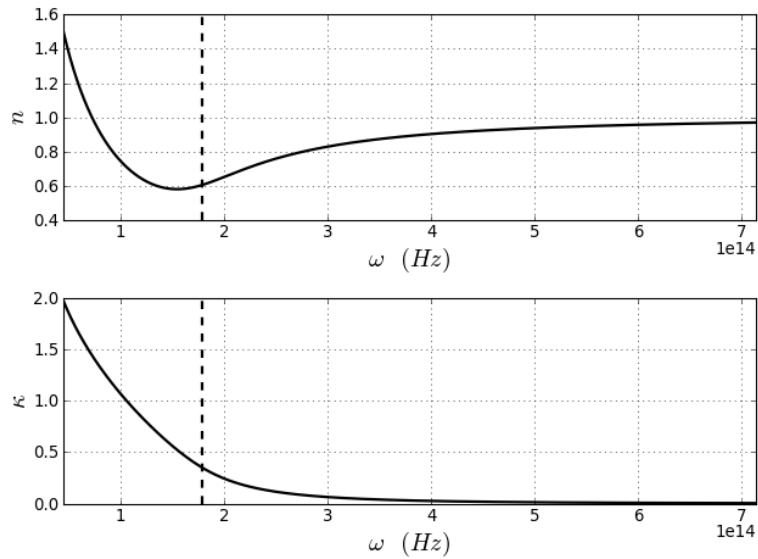


Figura 7.10: Índice de refracción para el plasma para los parámetros $Nv = 10^{25}$ y $\gamma = 10^{14}$ Hz. La línea discontinua representa la frecuencia de resonancia.

REFRACCIÓN Y REFLEXIÓN EN MEDIOS HOMOGÉNEOS E ISÓTROPAS

Hasta ahora se ha estudiado la propagación de la luz en el vacío y en el seno de la materia. Falta analizar qué ocurre cuando la luz cambia de medio, que se produce cuando existe una discontinuidad en el índice de refracción. Este problema se estudia para el caso más sencillo de una onda armónica plana que llega a una superficie de separación infinita y plana entre dos medios homogéneos e isótropos. Para el cálculo, se utilizarán las ecuaciones de Maxwell macroscópicas y las condiciones de contorno para los campos. Su resolución explícita se hace en primer lugar para medios transparentes. Aparecen explicados, en el contexto de la Óptica Electromagnética, los conocidos fenómenos de la refracción y la reflexión, así como la ley de Snell. Además, se obtienen relaciones explícitas para la polarización y la energía (leyes de Fresnel). Tras discutir que la solución encontrada no es válida en condiciones de reflexión total se vuelve a las condiciones de contorno y se adopta la forma de onda plana inhomogénea para la luz en el segundo medio. Analizaremos asimismo qué ocurre a la luz cuando llega a superficies metálicas.

Índice

8.1	Introducción	102
8.2	Dirección y frecuencia de las ondas	103
8.2.1	Condiciones de frontera	103
8.2.2	Ondas incidente, transmitida y reflejada	105
8.2.3	Aplicación de las condiciones de frontera	106
8.2.4	Ley de <i>Snell</i>	107
8.3	Amplitudes de las ondas	109
8.3.1	Fórmulas de FRESNEL	111
8.3.2	Incidencia normal	112
8.3.3	Segundo medio más denso: $n' > n$	112
8.4	Incidencia oblicua para $n' < n$. Reflexión total	114
8.4.1	Reflexión total interna frustrada	117
8.4.2	Desfases entre las ondas	117
8.5	Relaciones energéticas	118
8.6	Medios absorbentes	123

OBJETIVOS

- Conocer el comportamiento de la luz ante superficies donde cambian las propiedades ópticas.
- Obtener la dirección de propagación, la energía y la polarización de las ondas reflejada y transmitida.
- Estudiar los diferentes casos de índices de refracción entre los medios.
- Conocer la naturaleza de la luz en los medios dieléctricos y metálicos.

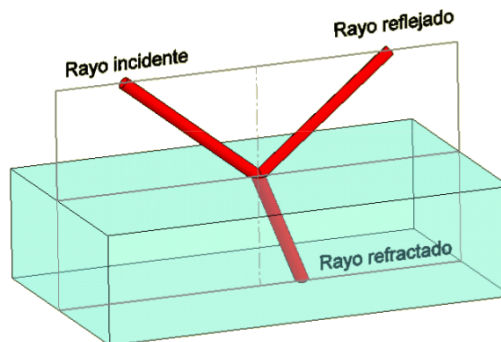


Figura 8.1: Ley de Snell desde un punto de vista geométrico.

REFERENCIAS GENERALES:

- M. Cabrera, F. J. López y F. Agulló. Óptica Electromagnética (vol 1. Fundamentos) Addison-Wesley Iberoamericana, 2a ed. (1998) – capítulos 9 y 10.

INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de reflexión y refracción son de sobra conocidos. Por ejemplo, en el vidrio de una ventana vemos lo que hay al otro lado, pero también aparecen reflejos. Según la Óptica Geométrica, se considera la existencia de los rayos reflejados y refractados que se generan en la interfaz entre dos medios. La ley de Snell caracteriza la dirección de propagación de estos rayos, Figura 8.1. No obstante, el modelo geométrico no da cuenta de otras propiedades, como es la relación energética entre ambos rayos ni los efectos de la polarización.

Considerando la Óptica Electromagnética, es posible abordar el problema a partir de las ecuaciones de Maxwell. Una onda armónica plana incide con un cierto ángulo sobre una interfaz entre dos medios, caracterizados por su índice de refracción. El objetivo es determinar las características de las ondas reflejada y transmitida. Para ello impondremos la continuidad del campo electromagnético en la interfaz. Además de la dirección de ambas ondas (ecuaciones de Fresnel) determinaremos su amplitud y estado de polarización (ecuaciones de Fresnel) y el reparto energético entre ambas ondas (vectores de Poynting). Trataremos tanto los medios dieléctricos como absorbentes.

Abordaremos el problema desde un punto de vista macroscópico, considerando las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales. Asumiremos que una onda armónica plana con polarización lineal incide sobre la superficie de separación entre los dos medios. Para poder resolver las ecuaciones, asumiremos que la superficie que separa ambos medios es un plano. Sin pérdida de generalidad, elegiremos los ejes de coordenadas de modo que sea el plano de separación el que esté ubicado en $z = 0$.

- Un cambio de medio significa un cambio de índice de refracción. Si los índices fueran iguales, la propagación se produciría como si de un sólo medio se tratase. No se consideran saltos en la permeabilidad magnética.

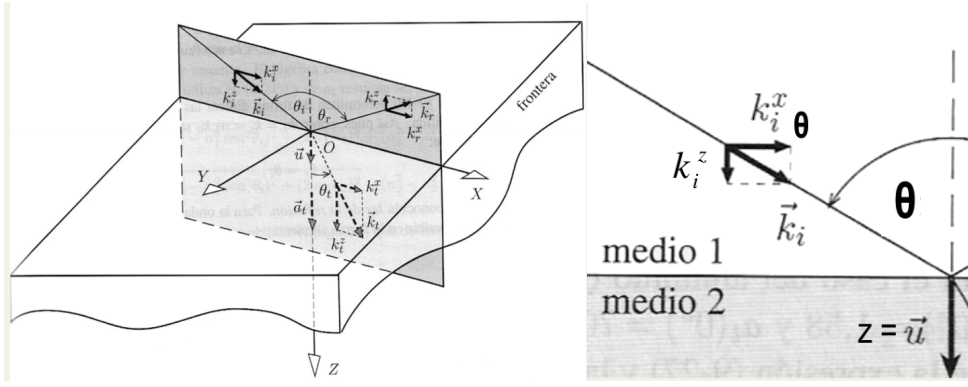


Figura 8.2: a) Esquema de la dirección de los haces incidente, reflejado y transmitido. b) Plano y ángulo de incidencia de sendos medios.

- La discontinuidad de índice es una buena aproximación porque la interfase es de un tamaño del orden atómico, que es muy pequeño frente a la longitud de onda de la radiación que nos interesa.

DIRECCIÓN Y FRECUENCIA DE LAS ONDAS

Vamos a resolver las ecuaciones de Maxwell para ambos medios, proponiendo unas soluciones que sean suficientemente generales pero que incorporen las condiciones iniciales (una onda incide sobre una superficie de discontinuidad). Como ambas soluciones no pueden ser independientes, estableceremos unas condiciones de frontera para los campos en la discontinuidad.

Supongamos dos medios materiales transparentes, con índices de refracción reales, n y n' , y no magnéticos, $\mu = \mu_0$. Sea una onda armónica plana de vector de ondas \mathbf{k}_i y frecuencia ω que incide desde el primer medio sobre la interfase $z = 0$, representada por el vector normal $\mathbf{u}_n = (0, 0, 1)$, dirigido hacia el segundo medio. Los vectores \mathbf{k}_i y \mathbf{u}_n definen llamado *plano de incidencia*, excepto cuando son paralelos. En las gráficas se identifica con el plano del papel. El ángulo que forman \mathbf{k}_i y \mathbf{u}_n se denomina *ángulo de incidencia*.

Supongamos que el plano de incidencia es el xz , Figura 8.2. Sea θ el ángulo de incidencia. Entonces el vector de ondas \mathbf{k}_i se puede escribir por componentes según los ejes x, y, z

$$\mathbf{k}_i = (k_i^x, 0, k_i^z) = n \frac{\omega}{c} (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad (8.1)$$

donde, la componente y de \mathbf{k}_i es nula.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se derivan a partir de las ecuaciones de Maxwell en la materia, Capítulo 7,

$$\nabla \cdot [\epsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r})] = 0, \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot [\mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r})] = 0, \quad (8.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - i\omega \mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (8.4)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + i\omega \epsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (8.5)$$

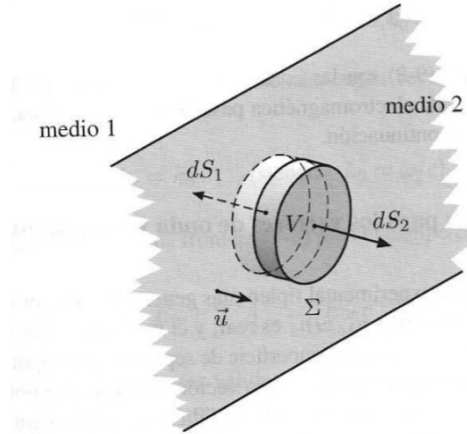


Figura 8.3: Condiciones de contorno de las Leyes de Maxwell.

Las condiciones de frontera nos dicen qué relaciones hay entre \mathbf{E} y \mathbf{H} a ambos lados de la discontinuidad, pues cumplen las ecuaciones de Maxwell. Supongamos un pequeño cilindro que rodea la superficie que tiene caras con área $d\mathbf{S}_1$, con $d\mathbf{S}_2 = -d\mathbf{S}_1$ y altura $h \rightarrow 0$, Figura 8.3. Podemos reescribir las dos primeras ecuaciones de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [n^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r})] &= 0, \\ \mu \nabla \cdot [\mathbf{H}_0(\mathbf{r})] &= 0,\end{aligned}$$

Estas condiciones en la frontera, $z \approx 0$, resultan ser¹

$$\begin{aligned}n^2 \mathbf{E} d\mathbf{S}_1 + n'^2 \mathbf{E}' d\mathbf{S}_2 &= 0, \\ \mu \mathbf{H} d\mathbf{S}_1 + \mu \mathbf{H}' d\mathbf{S}_1 &= 0.\end{aligned}$$

como $d\mathbf{S}_2 = -d\mathbf{S}_1$, entonces tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned}n^2 \mathbf{E}_n &= n'^2 \mathbf{E}'_n, \\ \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}'_n.\end{aligned}$$

De la misma forma, se pueden escribir la 3 ecuación de Maxwell de forma integral

$$\int_V \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_V i\omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) dV.$$

La integral derecha es 0 cuando el elemento de volumen se hace infinitamente fino $h \rightarrow 0$, mientras que la integral izquierda se puede escribir en forma de integral de superficie, resultando

$$\int_S \mathbf{E} \wedge d\mathbf{S} = 0. \quad (8.6)$$

¹ los valores del segundo medio están denotados con primas

Desarrollando esta integral en las dos superficies del elemento de frontera (el lateral se hace nula)

$$\mathbf{E} \wedge d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}' \wedge d\mathbf{S}_2 = 0, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} dS - \mathbf{E}' \wedge \mathbf{n} dS = 0, \quad (8.8)$$

puesto de $|d\mathbf{S}_1| = |d\mathbf{S}_2| = dS$. El término $\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$ es la componente tangencial del campo eléctrico, por lo que resulta $\mathbf{E}_{tg} = \mathbf{E}'_{tg}$. La ecuación tiene el mismo tratamiento y, en resumen, las ecuaciones de Maxwell en la frontera se condensan en

$$n^2 \mathbf{E}_n = n'^2 \mathbf{E}'_n, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{H}'_n, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{E}_{tg} = \mathbf{E}'_{tg}, \quad (8.11)$$

$$\mathbf{H}_{tg} = \mathbf{H}'_{tg}, \quad (8.12)$$

donde el subíndice tg significa “la componente tangencial del vector sobre la interfase” y el subíndice n significa “la componente normal del vector sobre la interfase”. Entonces, el campo magnético se mantiene inalterado bajo la presencia de la interfaz así como la parte transversal del campo eléctrico, mientras que la parte normal (perpendicular a la superficie) cambia.

Ondas incidente, transmitida y reflejada

Denotaremos la onda incidente por $\mathbf{E}_i = \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, donde \mathbf{A} es un vector complejo constante y $\mathbf{k}_i = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Para las ondas transmitida y reflejada lo más general que sabemos escribir es una superposición de ondas armónicas planas. En concreto, se supone que las ondas reflejada y transmitida son² $\mathbf{E}_r = \mathbf{R}e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots$, y $\mathbf{E}_t = \mathbf{T}e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots$. El objetivo es conocer los campos electromagnéticos reflejado y transmitido. Para calcular el campo \mathbf{H} en cada uno de los tres casos se utiliza

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}. \quad (8.13)$$

Las ecuaciones de Maxwell imponen algunas condiciones sobre los parámetros de las ondas. Aparte de las relaciones de ortogonalidad

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{A} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{T} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{R} = 0, \quad (8.14)$$

tenemos

$$|\mathbf{k}_i| = n\omega/c, \quad |\mathbf{k}_t| = n'\omega'/c, \quad |\mathbf{k}_r| = n\omega''/c. \quad (8.15)$$

² en adelante los puntos suspensivos representan los infinitos términos que no hemos escrito de la superposición de ondas planas que identificamos con la onda transmitida y la reflejada.

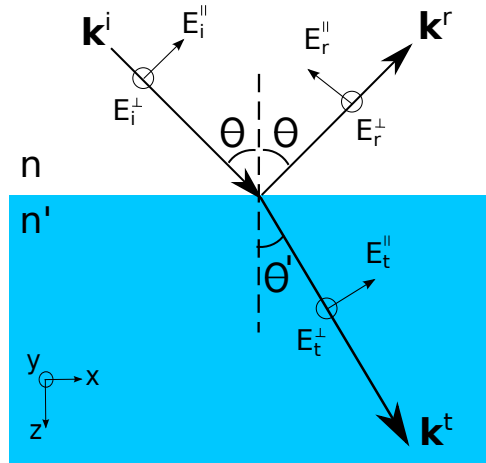


Figura 8.4: Parámetros involucrados.

Aplicación de las condiciones de frontera

En $z = 0$, el campo en la zona de entrada es el incidente más el reflejado y el campo a la derecha es exclusivamente el transmitido: $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t$. Esto resulta, componente a componente

$$\begin{aligned} E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx}, \\ E_{iy} + E_{ry} &= E_{ty}, \\ H_{ix} + H_{rx} &= H_{tx}, \\ H_{iy} + H_{ry} &= H_{ty}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

En la interfase $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ tenemos pues 4 ecuaciones de la forma

$$() e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + () e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} + \dots = () e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots \quad (8.17)$$

Las cuatro ecuaciones responden a este esquema de dependencia en el espacio y el tiempo con valores en los paréntesis que son función de las amplitudes $\mathbf{A}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ y los vectores de onda $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r, \dots, \mathbf{k}_t, \dots$

Podemos extraer información acerca de la solución analizando la forma de las ecuaciones. Obsérvese que las exponenciales complejas son funciones linealmente independientes. Para que se cumpla la igualdad debe cumplirse que, por un lado los argumentos de las exponenciales deben ser todos idénticos. Entonces, todas las frecuencias deben ser idénticas

$$\omega = \omega' = \dots = \omega'' = \dots \quad (8.18)$$

Lo mismo debe poder decirse de la dependencia espacial. Como no hay dependencia en z y la función en x e y debe ser la misma se puede escribir

$$k_x^i x + k_y^i y = k_x^r x + k_y^r y = k_x^t x + k_y^t y. \quad (8.19)$$

De igual forma, como también x e y son variables independientes podemos igualar la dependencia en x y la dependencia en y

$$\begin{aligned} k_x^i &= k_x^r = k_x^t, \\ k_y^i &= k_y^r = k_y^t = 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

La componente y es nula, pues según (8.1) el vector $\mathbf{k}_i = k(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ está en el plano de incidente. Según (8.20) se obtiene que los haces reflejado y transmitido \mathbf{k}_r y \mathbf{k}_t también están en el plano de incidencia (ley de coplanariedad en la Óptica Geométrica).

En z no podemos decir nada al no estar presente en las ecuaciones. Esto significa que la componente tangencial de \mathbf{k}_i (perpendicular a \mathbf{n}) es la misma para la onda incidente, para la onda transmitida y para la reflejada,

$$\mathbf{k}_{tg}^i = \mathbf{k}_{tg}^r = \mathbf{k}_{tg}^t. \quad (8.21)$$

Para resumir, los vectores de ondas de las ondas incidente, reflejada y transmitida resultan

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= n \frac{\omega}{c} (\sin\theta, 0, \cos\theta), \\ \mathbf{k}_r &= n \frac{\omega}{c} (\sin\theta, 0, -\cos\theta), \\ \mathbf{k}_t &= n' \frac{\omega}{c} (\sin\theta', 0, \cos\theta'). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Ley de Snell

Como conocemos dos componentes del vector de ondas y también conocemos su módulo, el vector de ondas de las ondas reflejada y transmitida están completamente determinado. Tenemos, pues, resuelto el problema de la existencia de las ondas reflejadas y transmitidas y de su dirección. Supongamos que el ángulo entre \mathbf{k}^r y \mathbf{u}_n es θ_r . Considerando (8.20) se tiene

$$k_x^i = k_x^r, \quad (8.23)$$

$$n \frac{\omega}{c} \sin\theta = n \frac{\omega}{c} \sin\theta_r, \quad (8.24)$$

y entonces el ángulo de reflexión es igual al de incidencia

$$\boxed{\theta_r = \theta.} \quad (8.25)$$

Para la onda transmitida

$$k_x^i = k_x^t, \quad (8.26)$$

$$n \frac{\omega}{c} \sin\theta = n' \frac{\omega}{c} \sin\theta_t. \quad (8.27)$$

se obtiene la *ley de Snell*

$$\boxed{n \sin\theta = n' \sin\theta_t.} \quad (8.28)$$

Algunos comentarios.

- Esta ley, calculada mediante un modelo electromagnético, coincide con el modelo geométrico.

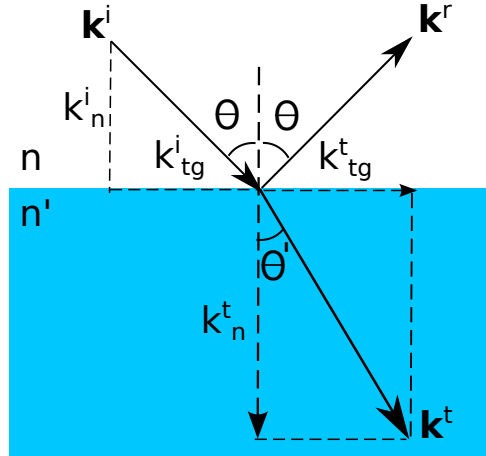


Figura 8.5: Parámetros involucrados para la ley de Snell.

- Desde el punto de vista microscópico lo que acabamos de encontrar es algo sorprendente: la luz generada por los átomos del medio es tan especial que *anula* la onda armónica plana incidente y la sustituye por otra en distinta dirección.
- Los índices de refracción en general dependen de la frecuencia. Tendremos tantas direcciones de propagación como frecuencias contenga el haz incidente.
- Según la ley de Snell, un haz que incida de forma normal a la superficie, $\theta = 0^0$, entonces se refleja y transmite en la misma dirección y distinto sentido, $\theta_r = \theta_t = 0^0$.

INCIDENCIA RASANTE En incidencia rasante, $\theta = 90^0$, cuando el índice de refracción del segundo medio es menor que el del primero, $n' > n$, resulta que el ángulo máximo de desviación resulta

$$n \sin 90^0 = n' \sin \theta'_{max}, \quad (8.29)$$

$$\sin \theta'_{max} = n/n'. \quad (8.30)$$

ÁNGULO LÍMITE Asimismo, cuando $n > n'$, aparece el ángulo límite que ocurre el haz transmitido sale con un ángulo de $\theta_t = 90^0$. Entonces, el ángulo de incidencia resulta, según la Ley de Snell,

$$\sin(\theta_{lim}) = \frac{n'}{n} \sin(90^0) = \frac{n'}{n}. \quad (8.31)$$

A partir de este ángulo, la luz no se puede transmitir, como veremos y toda la luz se refleja. Este fenómeno se conoce como reflexión total.

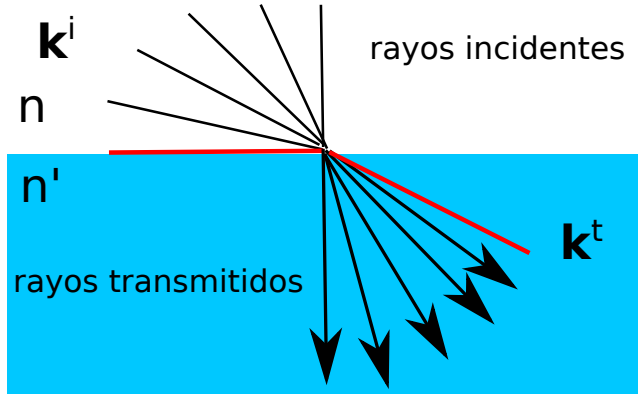


Figura 8.6: Cuando $n' > n$ los rayos se acercan a la normal. El vector en rojo representa el haz que incide de forma rasante.

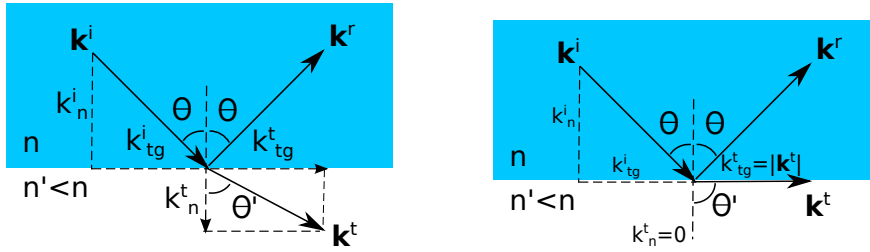


Figura 8.7: a) Cuando $n' < n$ el haz se separa de la normal. b) Fenómeno del ángulo límite.

AMPLITUDES DE LAS ONDAS

A partir del análisis de las fases hemos obtenido las direcciones de las ondas reflejada y transmitida. Ahora analizaremos las amplitudes, utilizando (8.16). Obviamente todas las ondas cumplen las ecuaciones de Maxwell por lo que, al ser ondas planas, los vectores \mathbf{A} , \mathbf{R} , \mathbf{T} del campo eléctrico son perpendiculares a sus correspondientes vectores de ondas. Nos interesa descomponer estos vectores en una base en la que tengan sólo dos componentes y luego relacionarlas con las componentes x e y . Se descompone el campo eléctrico en sus componentes paralelas al plano de incidencia, \parallel y perpendicular al plano de incidencia, \perp , según se muestra en la Figura 8.8, $\mathbf{A} = \cos \alpha \mathbf{A}_{\parallel} + \sin \alpha \mathbf{A}_{\perp}$. Se define acimut al ángulo formado entre el campo eléctrico y su componente paralela.

El acimut de la luz transmitida o reflejada será, en general, distinto del acimut la luz incidente. El cambio de acimut depende de los índices de refracción involucrados. La componente paralela A_{\parallel} está en el plano del papel y la perpendicular A_{\perp} es ortogonal al plano del papel; ambas son ortogonales al vector de ondas. Para relacionar las A_{\perp} , A_{\parallel} con las componentes x , y , z podemos considerar de relaciones trigonométricas sobre las Figuras 8.9 y 8.10

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\perp} &= A_{\perp}(0, 1, 0), & \mathbf{A}_{\parallel} &= A_{\parallel}(\cos \theta, 0, -\sin \theta), \\ \mathbf{R}_{\perp} &= R_{\perp}(0, 1, 0), & \mathbf{R}_{\parallel} &= R_{\parallel}(-\cos \theta, 0, -\sin \theta), \\ \mathbf{T}_{\perp} &= T_{\perp}(0, 1, 0), & \mathbf{T}_{\parallel} &= T_{\parallel}(\cos \theta', 0, -\sin \theta'). \end{aligned} \quad (8.32)$$

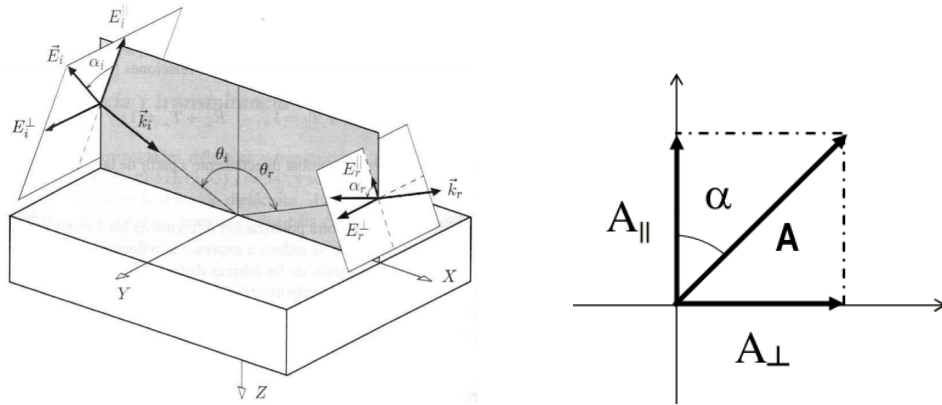


Figura 8.8: (a) Descomposición del campo eléctrico en las componentes paralela y perpendicular. (b) . Definición de azimut α y cálculo de las componentes perpendicular A_{\perp} y paralela A_{\parallel} de la amplitud en función del estado de polarización incidente.

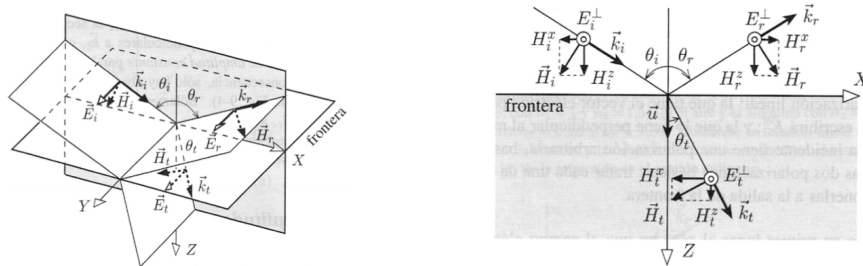


Figura 8.9: Campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia $(X, 0, Z)$.

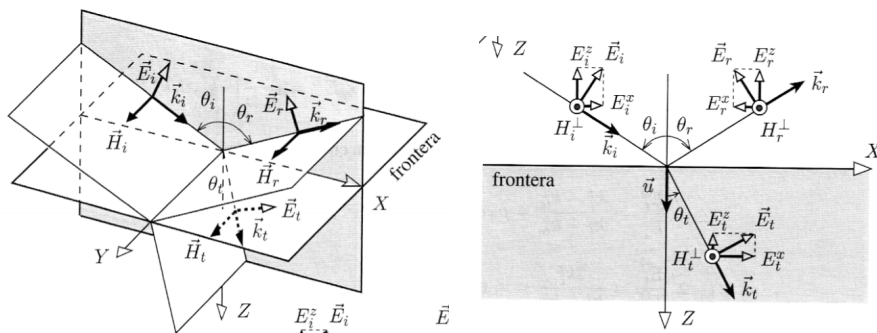


Figura 8.10: Campo eléctrico en el plano de incidencia $(X, 0, Z)$.

En $z = 0$, las exponenciales son todas iguales, y aplicando las ecuaciones de frontera en la interfase, como hemos visto,

$$e^{i(k_x^i x + k_y^i y - \omega t)} = e^{i(k_x^r x + k_y^r y - \omega t)} = e^{i(k_x^t x + k_y^t y - \omega t)} = e^{i(\cdot)}, \quad (8.33)$$

Podemos escribir el campo, simplificando la exponencial, $e^{i(\cdot)}$, que es la misma

$$\mathbf{E}_i = (A_{\parallel} \cos \theta, A_{\perp}, -A_{\parallel} \sin \theta) e^{i(\cdot)}, \quad (8.34)$$

$$\mathbf{E}_r = (-R_{\parallel} \cos \theta, R_{\perp}, -R_{\parallel} \sin \theta) e^{i(\cdot)}, \quad (8.35)$$

$$\mathbf{E}_t = (T_{\parallel} \cos \theta', T_{\perp}, -T_{\parallel} \sin \theta') e^{i(\cdot)}. \quad (8.36)$$

Para conocer \mathbf{H} se necesitan los vectores \mathbf{k} involucrados 8.22. Haciendo los correspondientes productos vectoriales

$$\mathbf{H}_{\alpha} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_{\alpha} \wedge \mathbf{E}_{\alpha} \quad (8.37)$$

se encuentra

$$\mathbf{H}_i = n \frac{1}{\mu c} (-\cos \theta A_{\perp}, A_{\parallel}, \sin \theta A_{\perp}) e^{i(\cdot)}, \quad (8.38)$$

$$\mathbf{H}_r = n \frac{1}{\mu c} (\cos \theta R_{\perp}, R_{\parallel}, \sin \theta R_{\perp}) e^{i(\cdot)}, \quad (8.39)$$

$$\mathbf{H}_t = n' \frac{1}{\mu c} (-\cos \theta' T_{\perp}, T_{\parallel}, \sin \theta' T_{\perp}) e^{i(\cdot)}. \quad (8.40)$$

Los vectores de onda son reales y, por tanto, las relaciones trigonométricas $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{k}_r = \mathbf{T} \cdot \mathbf{k}_t = 0$ implican que tanto la parte real como la imaginaria de \mathbf{A} , \mathbf{R} , \mathbf{T} son perpendiculares a sus correspondientes vectores de onda.

Considerando que en la frontera

$$\mathbf{A} + \mathbf{R} = \mathbf{T}, \quad (8.41)$$

obtenemos un sistema de ecuaciones en las componentes $_{\perp}$ y $_{\parallel}$. Entonces, las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} (A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \theta &= T_{\parallel} \cos \theta', \\ A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp}, \\ n(A_{\perp} + R_{\perp}) \cos \theta &= n' T_{\perp} \cos \theta', \\ n(A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= n' T_{\parallel}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Son cuatro ecuaciones, dos para las componentes paralelas (la primera y la cuarta) y dos en las que sólo aparece la componente perpendicular (segunda y tercera). La evolución de ambas componentes es independiente.

Fórmulas de FRESNEL

En (8.42) tenemos cuatro ecuaciones lineales y cuatro incógnitas, que son los coeficientes de reflexión y transmisión para las dos polarizaciones R_{\parallel} , R_{\perp} , T_{\parallel} y T_{\perp} .

Dichos parámetros se pueden obtener simplemente despejando de (8.42), de donde se obtiene

$$R_{\perp} = r_{\perp} A_{\perp} = \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} A_{\perp} = \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} A_{\perp} = \frac{k_z - k'_z}{k_z + k'_z} A_{\perp}. \quad (8.43)$$

$$T_{\perp} = t_{\perp} A_{\perp} = \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} A_{\perp} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} A_{\perp} = \frac{2k_z}{k_z + k'_z} A_{\perp}. \quad (8.44)$$

Para las magnitudes según la dirección paralela tenemos ecuaciones similares

$$R_{\parallel} = r_{\parallel} A_{\parallel} = \frac{n' \cos \theta - n \cos \theta'}{n' \cos \theta + n \cos \theta'} A_{\parallel} = \frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')} A_{\parallel} = \frac{n'^2 k_z - n^2 k'_z}{n'^2 k_z + n^2 k'_z} A_{\parallel}, \quad (8.45)$$

$$T_{\parallel} = t_{\parallel} A_{\parallel} = \frac{2n \cos \theta}{n' \cos \theta + n \cos \theta'} A_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} A_{\parallel} = \frac{2nn' k_z}{n'^2 k_z + n^2 k'_z} A_{\parallel}. \quad (8.46)$$

El *coeficiente de reflexión perpendicular* $r_{\perp} = R_{\perp} / A_{\perp}$ es la relación entre las amplitudes reflejada e incidente. Para el resto de casos tenemos un parámetro similar. Es un parámetro normalizado independiente de la amplitud de incidencia. La segunda igualdad se obtiene directamente a partir de (8.42). La tercera igualdad se obtiene a partir de la segunda, eliminando los índices de refracción a partir de la ley de Snell, $n \sin \theta = n' \sin \theta'$. La cuarta igualdad se escribe en función de los componentes de k_z y k'_z .

Incidencia normal

Analicemos ahora las ecuaciones que hemos obtenido. Cuando la incidencia es normal entonces $\theta = 0$ y $\theta' = 0$, por lo que los coeficientes valen

$$r_{\parallel} = -r_{\perp} = \frac{n' - n}{n + n'}, \quad (8.47)$$

$$t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n}{n + n'}. \quad (8.48)$$

En la incidencia normal el plano de incidencia no está definido ya que el vector de ondas y el normal a la interfase coinciden en dirección. Por ello las ecuaciones de Fresnel reflejan que no hay dirección privilegiada y las componentes paralela y perpendicular son las mismas. Para un caso particular, por ejemplo, si $n = 1$ y $n' = 1,5$ en incidencia normal se tiene $r_{\parallel} = -r_{\perp} = 0,2$ y $t_{\parallel} = t_{\perp} = 0,8$.

Segundo medio más denso: $n' > n$

Sea el caso donde el segundo medio tiene un índice de refracción mayor que en el primer medio, $n' > n$, como cuando un haz viene del vacío y llega a un vidrio. En la Figura 8.11 se muestra la amplitud y la fase de estos coeficientes. Vemos que las componentes en transmisión son bastante parecidas, aunque no las componentes en reflexión.

- Tanto los coeficientes de reflexión y de transmisión varían poco para ángulos de incidencia cercanos a la normal. Solamente a partir de unos 30° empieza a haber variaciones significativas.

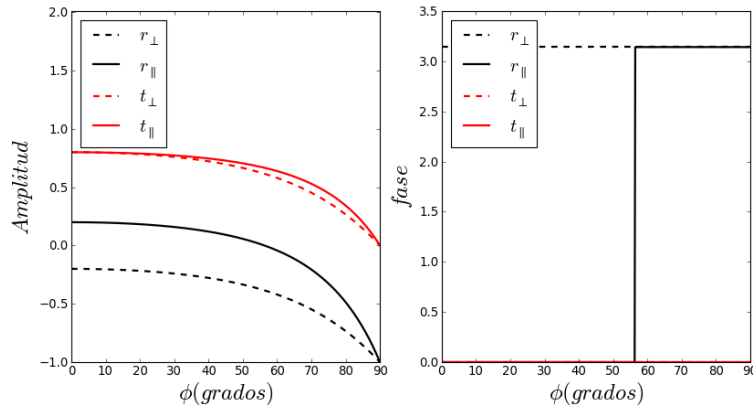


Figura 8.11: a) Amplitudes de la incidencia normal con $n = 1$ y $n = 1,5$. b) Desfases con dichos valores de los índices de refracción.



Figura 8.12: En incidencia rasante, un medio dieléctrico, como el agua, se comporta como un buen espejo, ya que $r_{\parallel,\perp} \approx 1$.

- También se observa que en incidencia rasante, la transmisión se hace nula y la reflexión se hace la unidad. Esto significa que las superficies se pueden comportar como espejos en incidencia rasante, Figura 8.12.

ÁNGULO DE BREWSTER Como se observa en la Figura 8.11, para un cierto ángulo que se denomina ángulo de Brewster, la componente paralela del haz reflejado, r_{\parallel} , se anula: $r_{\parallel} = 0$. Para determinar este ángulo tomamos (8.45) y hacemos el numerador 0. Esto sucede cuando

$$n' \cos \theta_B = n \cos \theta'. \quad (8.49)$$

Si eliminamos θ' a través de la ley de Snell, $n \sin \theta_B = n' \sin \theta'$, se obtiene que el ángulo de Brewster resulta

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n}. \quad (8.50)$$

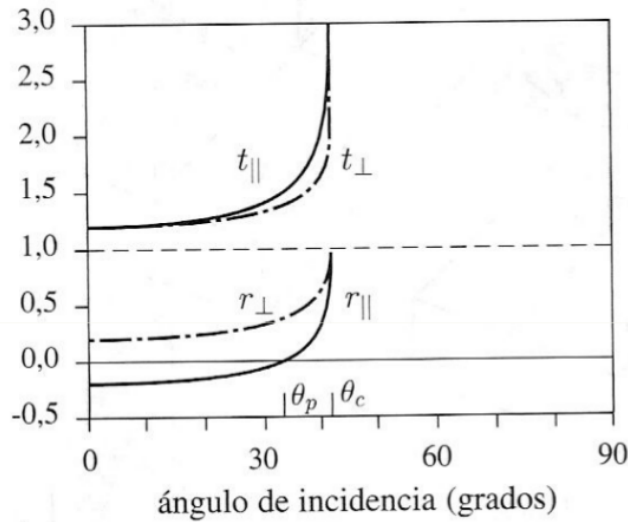


Figura 8.13: Valores de los coeficientes $t_{\parallel}, t_{\perp}, r_{\perp}, r_{\parallel}$ de transmisión y reflexión hasta el ángulo límite.

También, tomando la tercera igualdad de (8.45),

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_B - \theta')}{\tan(\theta_B + \theta')} \quad (8.51)$$

se obtiene $r_{\parallel} = 0$ cuando el denominador se hace infinito, $\tan(\theta_B + \theta') = \infty$. Esto significa que $\theta_B + \theta' = \pi/2$.

La importancia del ángulo de Brewster radica en que la luz reflejada tiene polarización lineal y perpendicular al plano de incidencia, independientemente del estado de polarización de la luz incidente. Tenemos, por lo tanto, un método para construir luz linealmente polarizada incluso a partir de luz natural. Por otra parte, la determinación del ángulo de Brewster nos permite determinar uno de los índices de refracción conocido el otro, aunque no es el método más preciso.

En general, cuando $n' > n$ los coeficientes de reflexión o transmisión son números reales, de modo que el desfase sólo puede ser de 0 o π . Como consecuencia, si la luz incide con polarización lineal, se transmite o se refleja con polarización lineal.

INCIDENCIA OBLICUA PARA $n' < n$. REFLEXIÓN TOTAL

Utilizando las ecuaciones de Fresnel, en la Figura 8.13 vemos lo que ocurre cuando el segundo medio tiene un índice de refracción menor que el medio incidente. Esto ocurre cuando el haz viaja, por ejemplo, del vidrio al aire. Según se desprende de la ley de Snell aparece el fenómeno de la reflexión total. Para cierto ángulo, determinado ángulo límite o crítico determinado por $n \sin \theta_C = n'$, el haz de entrada sale con $\theta' = \pi/2$. En este caso, los coeficientes de reflexión se hacen 1 antes de la incidencia rasante.

El problema es que para ángulos mayores al ángulo crítico, $\theta > \theta_C$, no podemos conocer θ' a partir de la ley de Snell (involucra números complejos) y por lo tanto no podemos calcular los coeficientes de reflexión y transmisión con ayuda de las fórmulas de Fresnel. Debemos retornar al planteamiento matemático del problema.

Interpretemos la reflexión total desde el punto de vista de los vectores de onda. Entonces, para $\theta > \theta_C$ se obtiene

$$k_x^t = k_x^i = \frac{\omega}{c} n \sin \theta > n' \frac{\omega}{c}, \quad (8.52)$$

es decir, *una componente del vector de ondas es mayor que su módulo*. Esto sólo lo podemos abordar incrementando el módulo, es decir, adoptando un vector de ondas complejo

$$\mathbf{k}_c^t = \mathbf{k}^t + i\mathbf{a}^t. \quad (8.53)$$

Las ondas transmitidas y reflejadas no son superposición de ondas armónicas con vector de ondas real, sino complejo. Matemáticamente para la onda transmitida y reflejada respectivamente:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T} e^{i(\mathbf{k}_c^t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (8.54)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{R} e^{i(\mathbf{k}_c^r \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (8.55)$$

Según (6.15) y (6.16) y utilizando la igualdad (6.18) se obtiene

$$\mathbf{k}_t^2 - \mathbf{a}_t^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2, \quad (8.56)$$

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{a}_t = 0, \quad (8.57)$$

donde se ha considerado que el índice de absorción es nulo, $\kappa = 0$. Se muestra que los vectores \mathbf{k}_t y \mathbf{a}_t deben ser perpendiculares entre sí.

Hay que reconstruir toda la solución del problema. Se llevan estas dos expresiones a las condiciones de frontera donde \mathbf{k}_c^t se determina a partir de la igualdad de las exponenciales sobre la superficie de discontinuidad (como antes). En $z = 0$ se tiene

$$\mathbf{k}_c^t \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad (8.58)$$

con lo que $k_x = k_{cx}^t$ y $k_y = k_{cy}^t$ (componentes tangenciales continuas). El plano de incidencia es xz . Por la elección de ejes $k_{cy} = 0$ (el vector de ondas está en el plano xz).

$$k_y^t + ia_y^t = 0, \quad (8.59)$$

que vale por dos ecuaciones $k_y^t = 0$ y $a_y^t = 0$, de modo que se puede decir que \mathbf{k}^t y \mathbf{a}^t están en el plano de incidencia. En lo que toca a k_{cx}

$$k_x^t + ia_x^t = n \frac{\omega}{c} \sin \theta, \quad (8.60)$$

de donde

$$a_x^t = 0, \quad (8.61)$$

$$k_x^t = n \frac{\omega}{c} \sin \theta. \quad (8.62)$$

Como \mathbf{a}^t sólo puede tener componente z y \mathbf{k}^t sólo puede tener componente x (se deriva de las condiciones) entonces el vector \mathbf{k}_c^t resulta, Figura 8.14,

$$\mathbf{a}^t = a_z^t \mathbf{u}_z, \quad (8.63)$$

$$\mathbf{k}^t = k_x^t = n \frac{\omega}{c} \sin \theta \mathbf{u}_x, \quad (8.64)$$

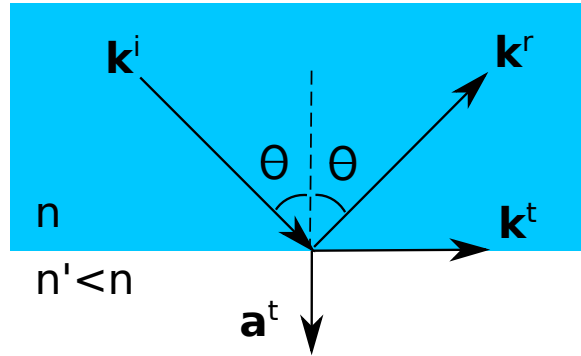


Figura 8.14: Plano xz y vectores \mathbf{k} , \mathbf{k}^t y \mathbf{a}^t en reflexión total.

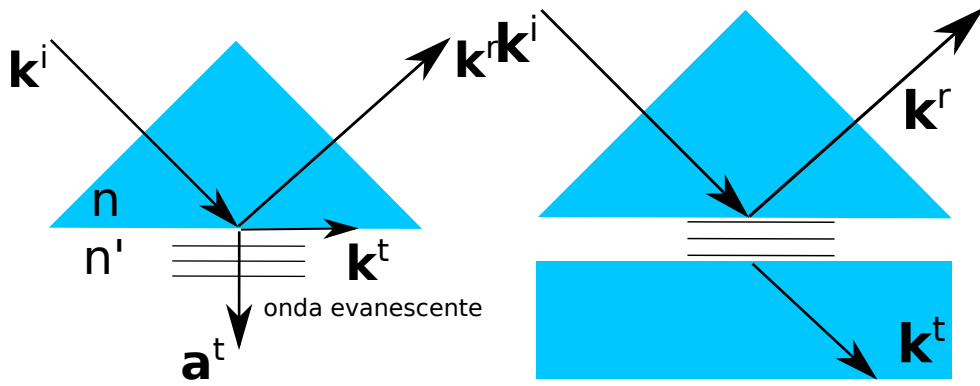


Figura 8.15: (a) Ejemplo de reflexión total sobre un prisma. Si tiene un índice de refracción apropiado, se utiliza como un espejo y, también, para generar ondas evanescentes. (b) Reflexión total interna frustrada (las distancias de separación son del orden de la profundidad de penetración).

donde $a_z^t = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}$.

La expresión para la onda transmitida queda

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T} e^{-a_z^t z} e^{i(k^t x - \omega t)}. \quad (8.65)$$

Como podemos observar, se trata de una onda inhomogénea de decrecimiento exponencial. Aunque se produce reflexión total, hay una onda que se transmite al otro lado de la discontinuidad, ya que $\mathbf{E}_t \neq 0$. Dicha onda evanescente es especial pues tiene un decrecimiento exponencial en la amplitud a medida que nos separamos de la frontera. En cuanto a la fase, se propaga en la dirección de la frontera. Si calculáramos la media del vector de Poynting obtendríamos que la fase y la energía se propagan *por* la superficie de discontinuidad. $\langle \mathbf{S}' \rangle_z = 0$. Esto significa que no existe flujo efectivo de energía ortogonal a la interfase. Algo de luz pasa, pero es “expulsada” y vuelve al primer medio.

El fenómeno de la reflexión total se utiliza para desarrollar espejos “perfectos”, con coeficiente de reflexión 1 y también para generar ondas evanescentes, Figura 8.15. También fundamenta la capacidad de transmitir información de la fibra óptica, que es un dispositivo formado por dos cilindros coaxiales. El de menor radio se denomina núcleo y la luz se transmite por él y el de mayor radio, denominado

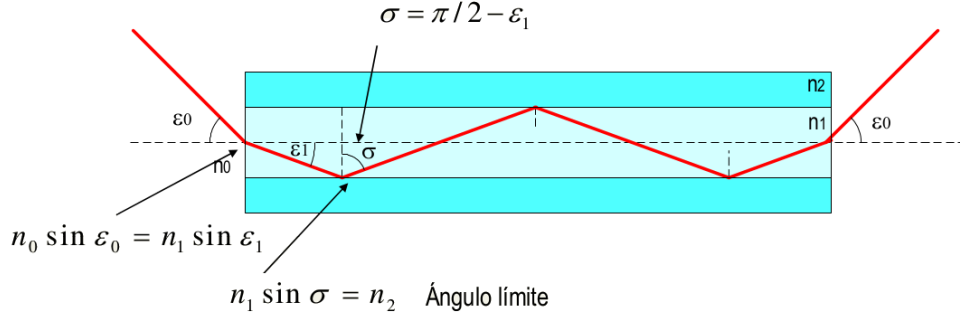


Figura 8.16: La reflexión total se utiliza en las fibras ópticas para transmitir la información a gran distancia.

recubrimiento, tiene un índice de refracción menor donde se produce la reflexión total, Figura 8.16. Cuando un haz incide con un ángulo menor al de aceptación de la fibra, dicho haz se transmite sin apenas pérdidas debido a la reflexión total entre el núcleo el recubrimiento.

Reflexión total interna frustrada

El hecho de que existe efectivamente luz al otro lado de la frontera se puede verificar por el fenómeno de la reflexión total frustrada. Esto se puede obtener cuando se sitúa otro medio dieléctrico muy cerca de la superficie, solamente unas pocas longitudes de onda. Entonces, se frustra el fenómeno de reflexión total y parte de la energía se transmite al otro medio, Figura 8.15b.

Desfases entre las ondas

Utilizando las ecuaciones de Fresnel, para el caso de las componentes k_z y k_z^t obtenemos los coeficientes de reflexión y transmisión (8.43-8.46)

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{k_z - k_{cz}^t}{k_z + k_{cz}^t}, & r_{\parallel} &= \frac{k_z n'^2 - k_{cz}^t n^2}{k_z n'^2 + k_{cz}^t n^2}, \\ t_{\perp} &= \frac{2k_z}{k_z + k_{cz}^t}, & t_{\parallel} &= \frac{2n'^2 k_z}{n'^2 k_z + n^2 k_{cz}^t}, \end{aligned} \quad (8.66)$$

donde hemos escrito el subíndice c a las componentes de la onda transmitida. Los detalles de este cálculo se encuentran en [?], donde los componentes resultan

$$k_z = n \frac{\omega}{c} \cos \theta \in \mathbb{R} \quad (8.67)$$

y

$$k_{cz}^t = i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2} \in \mathbb{C} \quad (8.68)$$

Por consiguiente los coeficientes quedan

$$r_{\perp} = \frac{n \cos \theta - i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}{n \cos \theta + i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}, \quad (8.69)$$

$$r_{\parallel} = \frac{n'^2 \cos \theta - i n \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}{n'^2 \cos \theta + i n \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}. \quad (8.70)$$

Como el numerador y el denominador son complejos conjugados se cumple

$$|r_{\perp}| = |r_{\parallel}| = 1. \quad (8.71)$$

Entonces vemos que $R_{\perp} = R_{\parallel} = 1$, por lo que toda la luz incidente se refleja. También se obtiene $T_{\perp} = T_{\parallel} = 0$. Esto es importante para generar espejos de gran calidad.

La anterior relación permite escribir los coeficientes de reflexión como³

$$r_{\parallel} = e^{i\delta_{\parallel}}, \quad r_{\perp} = e^{i\delta_{\perp}}. \quad (8.72)$$

Para calcular δ_{\parallel} y δ_{\perp} se definen⁴

$$r_{\perp} = \frac{|r_{\perp}| e^{i\frac{\delta_{\perp}}{2}}}{|r_{\perp}| e^{-i\frac{\delta_{\perp}}{2}}} = \frac{\cos \frac{\delta_{\perp}}{2} + i \sin \frac{\delta_{\perp}}{2}}{\cos \frac{\delta_{\perp}}{2} - i \sin \frac{\delta_{\perp}}{2}} = e^{i\frac{\delta_{\perp}}{2}}, \quad (8.73)$$

lo que nos permite obtener las tangentes

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}}{\cos \theta}, \quad (8.74)$$

$$\tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}}{(n'/n)^2 \cos \theta}. \quad (8.75)$$

Lo que normalmente nos interesa es la diferencia de fases entre las dos componentes. Esto se obtiene a partir de, Figura 8.17, $\Delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$

$$\tan \left(\frac{\delta_{\perp} - \delta_{\parallel}}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} - \tan \frac{\delta_{\parallel}}{2}}{1 + \tan \frac{\delta_{\perp}}{2} \tan \frac{\delta_{\parallel}}{2}} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}}{\sin^2 \theta}. \quad (8.76)$$

En reflexión total, se produce un cambio de fase relativo entre las componentes paralelas y perpendicular y esto produce un cambio del estado de polarización. Esto significa que la luz con polarización rectilínea se convertirá en general en elípticamente polarizada, dependiendo de la diferencia de fases de la fórmula anterior.

RELACIONES ENERGÉTICAS

Ahora que conocemos los campos reflejados y transmitidos, podemos calcular la energía que transportan estas ondas. Para ello, debemos calcular promedios temporales del vector de Poynting (potencia por unidad de área) y compararlos. Como consideraremos un estado estacionario, la conservación de la energía debe entenderse como igualdad del flujo que entra en una zona con el que sale de ella, no como igualdad de la energía “antes” y “después” como se hace, por ejemplo en las colisiones. Trabajamos con una onda armónica plana $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ y para ellas el promedio temporal del vector de Poynting resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k. \quad (8.77)$$

³ atención en la bibliografía al convenio de signos en la exponencial compleja: las fórmulas posteriores dependen de ese convenio.

⁴ cuidado con la definición. Es distinta a Cabrera

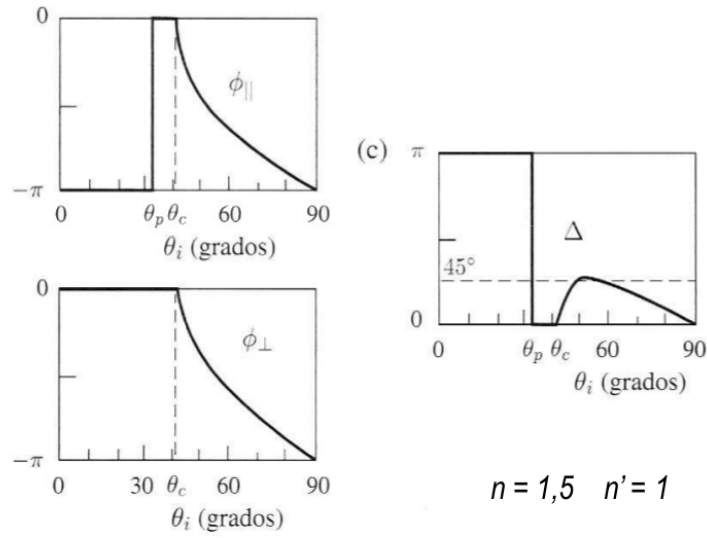


Figura 8.17: Cambios de fase para distintas incidencias.

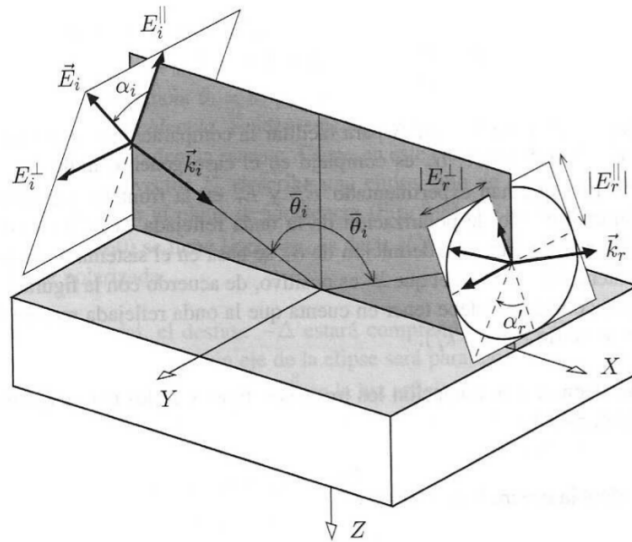


Figura 8.18: Modificación de la polarización debido a ángulo distintos en los coeficientes de reflexión.

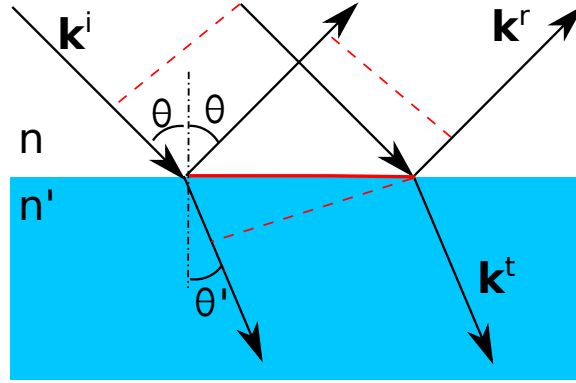


Figura 8.19: Modificación de la polarización debido a ángulo distintos en los coeficientes de reflexión.

Hay que considerar que la variable relevante es sólo la *componente normal* a la interfase del vector de Poynting. La energía que va a ser repartida entre onda transmitida y reflejada es la que incide sobre la superficie, y ésta es la que corresponde a la componente normal a la superficie. Lo que nos interesa es la *irradiancia* sobre la interfase, es decir, la potencia que incide sobre ella. Si \mathbf{n} es un vector unitario normal a la interfase

$$\text{Irradiancia} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n} = \langle \mathbf{S} \rangle_z, \quad (8.78)$$

para las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente

$$|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n \cos \theta |\mathbf{A}|^2, \quad (8.79)$$

$$|\langle \mathbf{S}_r \rangle_z| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n \cos \theta |\mathbf{R}|^2, \quad (8.80)$$

$$|\langle \mathbf{S}_t \rangle_z| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n' \cos \theta' |\mathbf{T}|^2. \quad (8.81)$$

Entonces nos encontramos en condiciones de definir dos conceptos relevantes en el estudio energético. La reflectancia queda de una forma sencilla

$$\mathcal{R} = \frac{|\mathbf{R}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{|\langle \mathbf{S}_r \rangle_z|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z|}, \quad (8.82)$$

pero la transmitancia es algo más compleja

$$\mathcal{T} = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} \frac{|\mathbf{T}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{|\langle \mathbf{S}_t \rangle_z|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z|}. \quad (8.83)$$

Presenta dos términos adicionales, uno es la relación entre índices de refracción y otro es la relación entre ángulos incidente y transmitido. La relación n'/n tiene que ver que en los medios de mayor índice la luz se “entretiene” más, tiene menor velocidad de fase, y por consiguiente hay mayor energía. Tiene que ver como cuando vamos por una carretera y hay un atasco, hay mayor cantidad de coches por unidad de superficie.

La relación $\cos\theta'/\cos\theta$ tiene que ver con la relaciones de área cuando el haz gira, debido a que se conserva la energía, pero no la relación de áreas.

Tal como están definidas estas magnitudes \mathcal{R} y \mathcal{T} dependen no sólo de n, n', θ, θ' sino también del estado de polarización. Se definen reflectancias y transmitancias paralelas y perpendiculares de modo independiente. Por ejemplo, para la reflectancia, definimos el ángulo α_i mediante las siguientes dos ecuaciones (α_i es un acimut, e indica la relación entre la cantidad de luz paralela y perpendicular que lleva un estado de polarización):

$$|A_{\parallel}| = |\mathbf{A}| \cos \alpha_i \quad (8.84)$$

$$|A_{\perp}| = |\mathbf{A}| \sin \alpha_i \quad (8.85)$$

eso nos permite reescribir la reflectancia como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{|\mathbf{R}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2 / \cos^2 \alpha_i} + \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2 / \sin^2 \alpha_i} \\ &= \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} \cos^2 \alpha_i + \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} \sin^2 \alpha_i \\ &= \boxed{\mathcal{R}_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \mathcal{R}_{\perp} \sin^2 \alpha_i} \end{aligned} \quad (8.86)$$

Sin embargo como la componente paralela reflejada es proporcional a la componente paralela incidente y lo mismo para la perpendicular, cada uno de los términos sólo depende de la discontinuidad de índices, de modo que se definen

REFLECTANCIA PARALELA

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} = |r_{\parallel}|^2 \quad (8.87)$$

REFLECTANCIA PERPENDICULAR

$$\mathcal{R}_{\perp} = \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} = |r_{\perp}|^2 \quad (8.88)$$

TRANSMITANCIA PARALELA

$$\mathcal{T}_{\parallel} = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} |t_{\parallel}|^2 \quad (8.89)$$

TRANSMITANCIA PERPENDICULAR

$$\mathcal{T}_{\perp} = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} |t_{\perp}|^2 \quad (8.90)$$

La generalización a reflexión total depende de que el vector de POYNTING no tiene componente normal, luego no hay energía que abandone la superficie:

$$\langle \mathbf{S}_t \rangle_z = 0 \implies \mathcal{T} = 0 \quad (8.91)$$

y $\mathcal{R}_{\parallel} = \mathcal{R}_{\perp} = 1$. Toda la luz que incide se refleja⁵.

⁵ La aparente paradoja se resuelve si consideramos por una parte que se trata de una relación entre flujos de energía, y el flujo entrante (transportado por la onda incidente) iguala el flujo reflejado (transportado

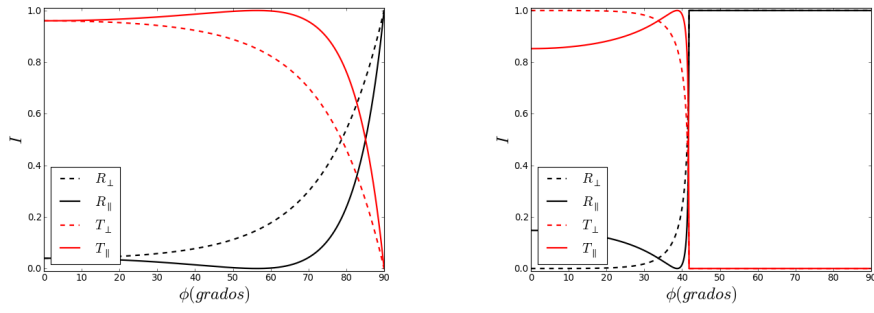


Figura 8.20: Relación entre las distintas transmitancias y reflectancias.

Incidencia casi normal



Incidencia rasante



Figura 8.21: Variación de la transmitancia y reflectancia en función del ángulo de incidencia.

Ahora esperamos obtener alguna ligadura entre reflectancias y transmitancias que dé cuenta de la conservación de la energía: por cálculo directo se puede demostrar que se verifican estas dos leyes de conservación, Figura 8.20,

$$\boxed{\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{T}_{\parallel} = 1, \quad \mathcal{R}_{\perp} + \mathcal{T}_{\perp} = 1,} \quad (8.92)$$

que se combinan para dar $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$, dicho de otro modo

$$|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z| = |\langle \mathbf{S}_t \rangle_z| + |\langle \mathbf{S}_r \rangle_z|. \quad (8.93)$$

Como caso particular, diremos que en la incidencia normal nos encontramos con otras dos igualdades de reflectancias y transmitancias

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \mathcal{R}_{\perp}, \quad (8.94)$$

$$\mathcal{T}_{\parallel} = \mathcal{T}_{\perp}. \quad (8.95)$$

Para continuar con el ejemplo anterior, si $n = 1$ y $n' = 1,5$, entonces $\mathcal{R} = 0,04$ y $\mathcal{T} = 0,96$. En las lentes y otros elementos formadores de imagen, es importante considerar que por cada intercara, se pierde aproximadamente un 4% debido a reflexiones indeseadas. Cuando hay muchos elementos, es necesario utilizar tratamientos antirreflectantes sobre las superficies para evitar la pérdida de energía⁶

por la onda reflejada) y por otra, que se trata de un promedio temporal, luego funcionaría aproximadamente para ondas no armónicas, que son aquellas para las que existe verdaderamente un “proceso” de reflexión transmisión en el sentido de que llega una onda a la interfase y se divide en dos y todo acaba poco tiempo más tarde.

⁶ los tratamientos antirreflectantes se fundamentan en el fenómeno de las interferencias.

MEDIOS ABSORBENTES

Hasta aquí todo lo que hemos hecho en este capítulo parte de la consideración de que los dos medios en que se propaga la onda son completamente transparentes, $\kappa = 0$. En esta sección vamos analizar qué ocurre cuando el segundo medio es absorbente. El primer medio queda caracterizado por un índice n real y el segundo por uno complejo, $n'_c = n + i\kappa$. El procedimiento de análisis es similar al caso de reflexión total. Consideramos un haz transmitido con vector de ondas complejo

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T}e^{i(\mathbf{k}_c^t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (8.96)$$

Al considerar las condiciones de frontera, de donde por independencia lineal de las exponenciales se tiene que sobre la superficie de discontinuidad ($z = 0$) se ha de verificar la igualdad

$$\mathbf{k}_c^t \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad (8.97)$$

es decir

$$k_{cx}^t = k_x^t + ia_x^t = k_x, \quad (8.98)$$

$$k_{cy}^t = k_y^t + ia_y^t = k_y = 0. \quad (8.99)$$

Como $k_y^t = a_y^t = 0$ entonces \mathbf{k}^t y \mathbf{a}^t están en el plano de incidencia.

$$k_x^t = k_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta, \quad (8.100)$$

donde θ es el ángulo de incidencia. Además, $a'_x = 0$, y por tanto $\mathbf{a}' = a'_z \mathbf{u}_z$. En cuanto a \mathbf{k}' , tenemos

$$\mathbf{k}^t = k_z \mathbf{u}_z + n \frac{\omega}{c} \sin \theta \mathbf{u}_x. \quad (8.101)$$

Como, según las ecuaciones de Maxwell (6.19)

$$\mathbf{k}^{t,2} - \mathbf{a}^{t,2} = \frac{\omega^2}{c^2} (n'^2 - \kappa'^2), \quad (8.102)$$

$$\mathbf{k}^t \cdot \mathbf{a}^t = \frac{\omega^2}{c^2} n' \kappa'. \quad (8.103)$$

podemos obtener los valores k_z^t y a_z^t , [?]. El vector de ondas de la onda refractada queda especificado por completo y de manera única. Para resolver completamente el problema necesitaríamos calcular las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Es un cálculo trabajoso del que sólo comentaremos alguna consecuencia:

- Las expresiones para los coeficientes de reflexión siguen valiendo, si donde haya k_z^t ponemos k_{cz}^t y donde haya n' ponemos n'_c . El resultado es

$$r_{\parallel} = \frac{n_c'^2 k_z - n^2 k_{cz}^t}{n_c'^2 k_z + n^2 k_{cz}^t}, \quad (8.104)$$

$$r_{\perp} = \frac{k_z - k_{cz}^t}{k_z + k_{cz}^t}. \quad (8.105)$$

Estos coeficientes de reflexión son complejos, debido al vector de ondas y al índice de refracción, para cualquier ángulo de incidencia.

- Se puede cambiar el estado de polarización mediante reflexiones en medios absorbentes puesto que añaden desfases. De hecho hay una técnica de medida de índices de refracción, la elipsometría, que se basa en el estudio de los

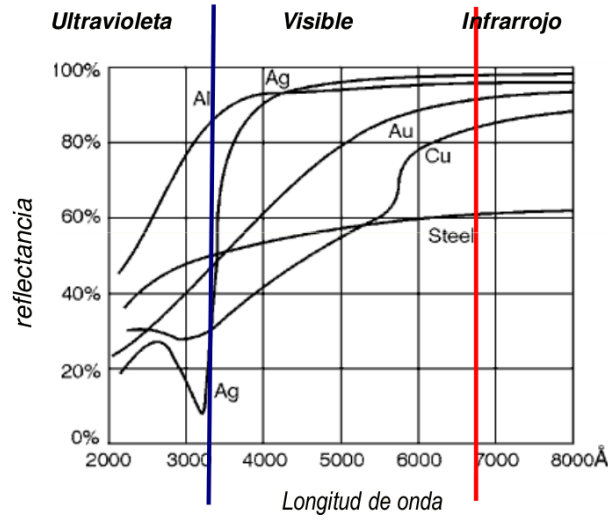


Figura 8.22: Medidas experimentales de la reflectancia frente a la longitud de onda. Esto señala que el cobre refleja mejor los colores rojizos, adquiriendo dicho color a nuestro ojo, mientras que metales como el aluminio reflejan todos aproximadamente igual.

cambios de polarización en las reflexiones de ondas sobre medios de índice desconocido (sección 9,6 del libro de Cabrera).

- Para las reflectancias (pero no para las transmitancias) también valen las relaciones que ya hemos encontrado para los medios transparentes:

$$\mathcal{R}_{\parallel} = |r_{\parallel}|^2, \quad (8.106)$$

$$\mathcal{R}_{\perp} = |r_{\perp}|^2. \quad (8.107)$$

INCIDENCIA NORMAL La incidencia normal sucede cuando para la onda incidente $\mathbf{k} = k_z \mathbf{u}_z = n \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$. Con esta elección de ejes el plano de la discontinuidad es el xy . Las componentes x e y se conservan

$$\begin{aligned} k_x &= k_{cx}^t = 0, \\ k_y &= k_{cy}^t = 0, \end{aligned} \quad (8.108)$$

lo que implica $k_x^t = k_y^t = a_x^t = a_y^t = 0$. El vector de ondas de la onda transmitida sólo puede tener componente z : $\mathbf{k}_c^t = (k_z^t + ia_z^t) \mathbf{u}_z$. Para obtener k_z^t y a_z^t nos valemos de

$$\mathbf{k}_c'^2 = n_c'^2 \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (8.109)$$

de donde separando en parte real e imaginaria

$$k_z' = n' \frac{\omega}{c}, \quad (8.110)$$

$$a_z' = \kappa' \frac{\omega}{c}. \quad (8.111)$$

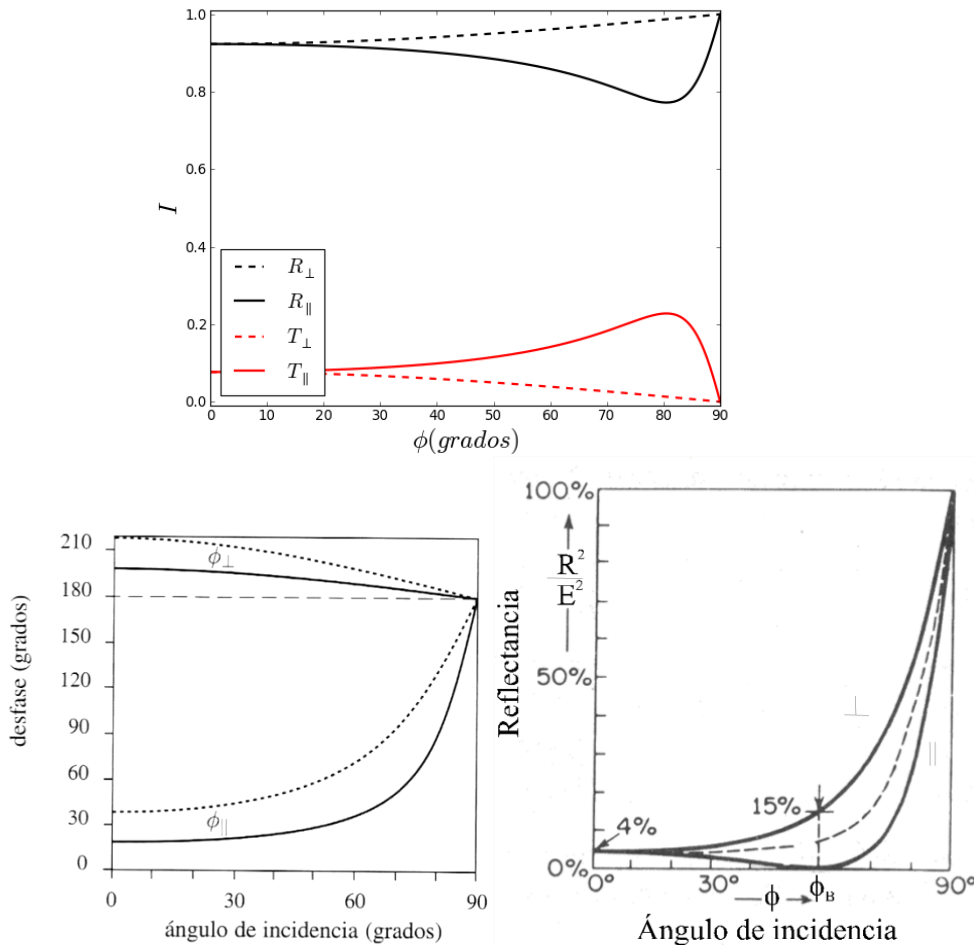


Figura 8.23: Reflectancias y desfases en medios absorbentes. Comparación con un medio transparente donde la reflectancia paralela para el ángulo de Brewster se anula. Aquí aparece un mínimo de intensidad en la reflectancia, pero no es nulo.

Entonces se obtienen los coeficientes reflexión y reflectancias

$$r_{\parallel} = -r_{\perp} = \frac{n' + i\kappa' - n}{n' + i\kappa' + n'} \quad (8.112)$$

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \mathcal{R}_{\perp} = \frac{(n' - n)^2 + \kappa'^2}{(n' + n)^2 + \kappa'^2}. \quad (8.113)$$

Por ejemplo, cuando $n = 1$ la reflectancia aire-aluminio es 83 % y la aire-mercurio 78 %.

- Hay que observar que incluso en incidencia normal los coeficientes de reflexión son complejos.
- Los coeficientes de reflexión son muy altos. A modo de ejemplo valga un vidrio de $n = 1,5$, que tiene coeficiente de reflexión de $\sim 0,2$, es decir, una reflectancia de en torno al 4 %.
- Las reflectancias crecen con κ' . Es decir, los medios más absorbentes son también más reflectantes. Si este coeficiente $\kappa \gg n, n'$ entonces $\mathcal{R}_{\parallel} = 1$.

CONCLUSIONES

- Al pasar la onda a otro medio, los átomos anulan la onda incidente y generan dos, una reflejada y otra transmitida, que se propagan en distinta dirección. Las direcciones de estas ondas se calculan mediante la ecuación de Snell.
- Las ecuaciones de Fresnel nos permiten determinar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas, que varían según la polarización del haz incidente. Los coeficientes de Fresnel son reales.
- Cuando $n' > n$, los desfases en la polarización son de 0 a π . En el caso de incidir con luz linealmente polarizada sólo cambia el azimut de salida.
- Existe un ángulo, denominado ángulo de Brewster para el cual la luz reflejada está totalmente polarizada de manera perpendicular al plano de incidencia.
- Cuando $n' < n$ se puede producir el fenómeno de reflexión total. La luz no es capaz de propagarse por el segundo medio, no obstante existen ondas evanescentes de amplitud exponencialmente decreciente. Este reflexión total se puede frustrar si se ubica otro medio muy cerca (unas pocas longitudes de onda).
- Par el caso de reflexión total, se producen desfases entre las componentes perpendicular y paralela. Se produce un cambio en el estado de polarización.
- En todos los casos, la energía se conserva: $R + T = 1$.
- Para el caso de metales, las ecuaciones se complican. No hay ángulo de Brewster pero sí una situación de mínimo.

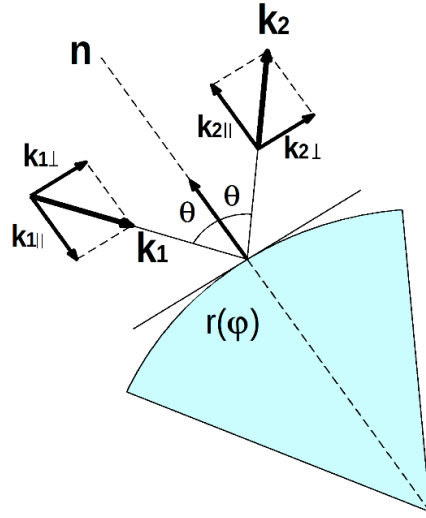


Figura 8.24: Reflexión sobre una superficie no plana.

COMPLEMENTO: SUPERFICIES CON DIRECCIONES ARBITRARIAS

Veamos la dirección de salida del haz cuando las direcciones del haz incidente y de la normal a la superficie son arbitrarias. Entonces, las componentes paralela y perpendicular del vector \mathbf{k} respecto al vector \mathbf{n} resulta ser

$$\mathbf{k}_1^{\parallel} = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (8.114)$$

$$\mathbf{k}_1^{\perp} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^{\parallel}. \quad (8.115)$$

En la reflexión, la componente perpendicular, para la reflexión, se mantiene y la componente paralela cambia de signo. Por consiguiente, el haz reflejado tiene la trayectoria

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_1^{\perp} - \mathbf{k}_1^{\parallel} \\ &= \mathbf{k}_1 - 2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (8.116)$$

Asimismo, el ángulo θ se obtiene como

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{k}_1| \cdot |\mathbf{n}|}. \quad (8.117)$$

Nota: Cuando la superficie entre los dos medios no es plana, sino que está descrita para una ecuación $r = r(\varphi)$, entonces la reflexión se puede determinar a partir de cálculo vectorial las ecuaciones anteriores son válidas, pero la normal a la superficie local se calcula mediante

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{\|(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}\|}. \quad (8.118)$$

COMPLEMENTO: SUPERFICIES RUGOSAS

En la práctica, las superficies no suelen ser perfectamente planos, y la Ley de Snell permite distinguir entre la reflexión especular y la reflexión difusa, las cuales se diferencian en que todos los rayos salen en una misma dirección o en distintas direcciones, produciendo efectos visuales distintos (la primera permite observar reflejos de manera clara y la segunda de manera difusa). Un análisis de la relación



Figura 8.25: Reflexiones especular (casi) y difusa.

energética de cada una de las direcciones es un problema complejo que necesita un análisis estadístico [? ?].

MEDIOS ANISÓTROPOS

En el capítulo **POLARIZACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS** analizamos brevemente los elementos polarizadores desde un punto de vista teórico, estudiando su matriz de Jones y viendo como cambia el estado de polarización de la luz incidente. En este tema veremos cómo algunos tipos de materiales no son isótropos, es decir se comportan de forma diferente según la dirección del campo eléctrico incidente.

Índice

9.1	Anisotropía natural e inducida	130
9.2	Matriz dieléctrica	131
9.3	Clasificación de los medios anisótropos	132
9.4	Propagación de ondas armónicas planas	132
9.5	Medios uniáxicos	134
9.5.1	Superficie de vectores de onda. Eje óptico	134
9.5.2	Fase y polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria	135
9.5.3	Doble refracción	137
9.6	Elementos anisótropos	138
9.6.1	Láminas retardadoras	138
9.6.2	Medios absorbentes; dicroísmo; polaroides	141

Objetivos

- Conocer los mecanismos por los que se produce la anisotropía.
- Saber tratar matemáticamente los medios anisótropos.
- Saber clasificar los medios anisótropos.

Referencias generales

- Born, M. and Wolf, E., "Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light", Cambridge university press (1999).
- Goldstein D. "Polarized Light, revised and expanded", CRC Press (2011).

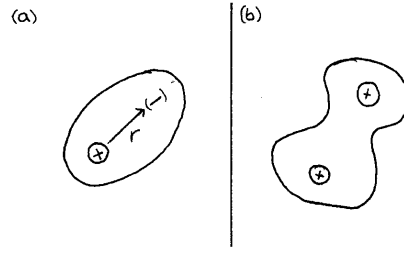


Figura 9.1: Significado microscópico de la isotropía. a) la perturbación originada por un campo sobre un átomo es igualmente eficaz en todas las direcciones (isotropía microscópica). b) la perturbación sobre una molécula diatómica es más eficaz en unas direcciones que en otras (anisotropía microscópica).

ANISOTROPÍA NATURAL E INDUCIDA

Para medios isótropos supusimos la existencia de una fuerza recuperadora a nivel molecular proporcional a la separación entre cargas

$$\mathbf{F}_{int} = m\omega_0^2 \mathbf{r}. \quad (9.1)$$

Ya dijimos que la linealidad no implicaba que ω_0 fuese un escalar. De hecho, sólo será un escalar si la dirección en que produzcamos la separación de cargas es indiferente, esto es, si los efectos de un campo eléctrico aplicado son igualmente eficaces separando cargas independientemente de su dirección. Si ocurre así, según la deducción que hicimos, $\epsilon_0\chi_e$ será también un escalar en la expresión $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e \mathbf{E}$, y $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ implicará naturalmente $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$. Imaginemos ahora el caso de una molécula biatómica.

Vemos claramente que hay una dirección intrínsecamente privilegiada en un material cuya estructura microscópica es de este tipo (Figura 9.1b). Un mismo campo será más eficaz deformando la nube electrónica en una dirección que en otra. Ahora se cumplen las siguientes relaciones, donde el gorro denota una matriz (que introduce la dependencia de la dirección)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int} &= \hat{M}\mathbf{r}, \\ \mathbf{P} &= \hat{\chi}_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 (\hat{1} + \hat{\chi}_e) \mathbf{E} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Los parámetros \hat{M} , $\hat{\chi}_e$ y $\hat{\epsilon}$ tienen ahora carácter tensorial¹. Como consecuencia de ello, los índices de refracción dependerán del estado de polarización. Imaginemos un medio hecho de moléculas anisótropas como las de la Figura 9.1, (b). Si están distribuidas de modo aleatorio, los promedios espaciales harán que el medio sea macroscópicamente isótropo (p.ej., el aire). Para obtener medios *macroscópicamente* anisótropos las moléculas deben estar orientadas en la misma dirección, como en el caso de sólidos cristalinos y cristales líquidos.

La anisotropía de los cristales podríamos llamarla de *origen natural*. Pero nosotros podemos crear *anisotropías inducidas*. Por ejemplo, si aplicamos un fuerte campo eléctrico estacionario a ciertos medios, los convertiremos en anisótropos por alineación de momentos dipolares eléctricos. Lo mismo si se trata de un campo magnético estacionario. Pero también podemos causar anisotropía por medios mecánicos, como presiones o estiramientos (Figura 9.2).

¹ Con nuestro nivel, consideraremos únicamente que están representados por matrices.



Figura 9.2: a) Cuando se tensionan algunos materiales aparecen anisotropías. (b) Por los procesos de fabricación a veces las tensiones están congeladas dentro del material.

Vamos a considerar sólo el caso de medio anisótropo más sencillo de medios no magnéticos, $\mu = \mu_0$, homogéneos, medios dieléctricos, $\sigma = 0$ y transparentes.

MATRIZ DIELECTRICA

Un medio transparente isótropo se caracteriza mediante una constante dieléctrica, que es un escalar real. Por otro lado, un medio transparente anisótropo se caracteriza mediante una matriz hermitica. Esto se puede deducir analizando la energía. En los medios transparentes toda la energía que entra en un volumen V sale de él. Llamaremos Σ a la superficie cerrada que confina V . Para formular cuantitativamente que toda la energía que entra sale hacemos la integral de superficie

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle ds = 0. \quad (9.3)$$

donde \mathbf{n}_{Σ} es el vector normal a la superficie y ds un elemento diferencial de ella. Cualquier superficie debe cumplir esta condición, que por el teorema Gauss se reduce a

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = 0. \quad (9.4)$$

Para ondas armónicas, el promedio temporal del vector de Poynting resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \}. \quad (9.5)$$

Para calcular la divergencia del Vector de Poynting utilizamos la siguiente igualdad

$$\nabla (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \nabla \wedge \mathbf{H}^*. \quad (9.6)$$

Además, con las dos últimas ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= -i\omega\mathbf{D}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{i\omega}{4} \sum_{k,l} (\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{lk}) E_k E_l^*, \quad (9.7)$$

donde k, l recorren las coordenadas x, y, z . Por consiguiente, se debe cumplir

$$\epsilon_{kl}^* = \epsilon_{lk}, \quad (9.8)$$

es decir, la matriz es hermítica y se puede diagonalizar a una matriz con autovalores reales y cuyos autovectores son ortogonales.

CLASIFICACIÓN DE LOS MEDIOS ANISÓTROPAS

- Si algún elemento de la matriz ϵ_{kl} es complejo se dice que el medio tiene *actividad óptica*².
- Si todos son reales se dice que el medio *no tiene actividad*.

Puede parecer que una propiedad física como es la actividad óptica depende de la base, pero no es así. En efecto, antes hemos dicho que toda matriz dieléctrica, por ser hermítica era diagonalizable a una matriz de elementos reales. Pero no hemos explicado que el cambio de base necesario puede involucrar operaciones que son algo más que un mero cambio de ejes en el espacio geométrico. En efecto, si la matriz dieléctrica que tenemos en una cierta base tiene elementos complejos para diagonalizarla será necesario multiplicar por una matriz unitaria, que a su vez tiene elementos complejos, y que representa un cambio de base no en el espacio geométrico, sino en el de las polarizaciones. Si la matriz de que disponemos es en origen real en todos sus elementos, un mero cambio de ejes en el espacio geométrico será suficiente para diagonalizarla.

En lo que resta sólo abordaremos el caso de medios sin actividad óptica. Para ellos siempre podemos encontrar un sistema de referencia en que la matriz sea diagonal. Diremos entonces que estamos haciendo la descripción en un *sistema de ejes principales*. Entonces, a los elementos de la diagonal (autovalores) se les llama *constantes dieléctricas principales*: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Se definen entonces toda una serie de magnitudes relativas a los ejes principales ($\alpha = x, y, z$):

- índices de refracción principales: $n_\alpha = \sqrt{\epsilon_\alpha / \epsilon_0}$
- velocidades de fase principales : $v_\alpha = c / n_\alpha$

Las magnitudes principales no pueden ser las tres iguales (el medio sería isotrópico), de modo que se presentan dos casos

- medios *biáxicos*: las tres diferentes $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ y $\epsilon_x \neq \epsilon_z$.
- medios *uniáxicos*: dos iguales.

PROPAGACIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Como hemos visto, en los medios anisótropos la constante dieléctrica es una matriz. Por ello, no podemos separar tan

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

con $\mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0 \in \mathcal{C}$ constantes y $\omega, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$ constantes (medios transparentes). Nuestro problema es determinar las relaciones que existen entre estos parámetros (por ejemplo, relación entre vector de ondas y frecuencia, o entre vector de ondas y vectores de intensidad de campo...).

² que se traduce en el cambio del acimut de la luz linealmente polarizada que incide sobre él.

Como siempre, acudimos a las ecuaciones macroscópicas de Maxwell y el resultado es

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 &= \mu\omega\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 &= -\omega\mathbf{D}_0\end{aligned}$$

Es decir, $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ son mutuamente perpendiculares entre sí. Además, $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, pero eso no quiere decir $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, que en general será falso. Esto implica que la energía no irá en la misma dirección que la fase. De modo que

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (9.9)$$

no lleva la misma dirección que el vector de ondas. En lo que sigue estudiaremos siempre la propagación de la fase, porque luego a partir de \mathbf{E}, \mathbf{H} se obtiene de modo sencillo la propagación de la energía. Si reescribimos el segundo rotacional y después sustituimos el valor de \mathbf{H}_0 que nos da el primero

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_0 &= \hat{\mathbf{e}}\mathbf{E}_0 \\ &= -\frac{1}{\omega}\mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 \\ &= -\frac{1}{\mu\omega^2}\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0)\end{aligned} \quad (9.10)$$

ejecutando el doble producto vectorial

$$\mathbf{D}_0 = -\frac{1}{\mu\omega^2} \left[\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{k}^2) \right] \quad (9.11)$$

finalmente el resultado de combinar los dos rotacionales es

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \mathbf{E}_0 + \mu\omega^2 \hat{\mathbf{e}} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (9.12)$$

ésto es un conjunto de 3 ecuaciones, que queremos resolver para \mathbf{k} y para \mathbf{E} . Como son lineales en \mathbf{E}_0 , las podemos reescribir con ayuda de una matriz, $\mathbf{M}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{e}})$:

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{e}}) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0} \quad (9.13)$$

para escribir la matriz en la forma más sencilla posible hay que utilizar como ejes coordenados los ejes principales x, y, z . Entonces \mathbf{M} es

$$\begin{bmatrix} (n_x \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & (n_y \frac{\omega}{c})^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (n_z \frac{\omega}{c})^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{bmatrix}.$$

\mathbf{E}_0 debe ser autovector de la matriz con autovalor nulo. Se debe producir que $|\mathbf{M}| = 0$, lo que limitará los vectores de onda posibles.

El proceso será obtener dichos vectores de onda y luego llevarlos a la ecuación de autovalores para despejar \mathbf{E}_0 . Eso equivale a la resolución completa del problema que nos habíamos fijado: determinar la propagación de oap en medios anisótropos.

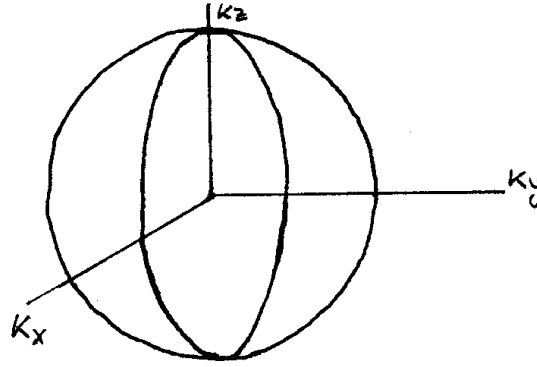


Figura 9.3: Esfera y elipsoide de vectores de onda. Dependiendo de n_e y n_o el elipsoide estará dentro o fuera de la esfera.

MEDIOS UNIÁXICOS

Superficie de vectores de onda. Eje óptico

A partir de ahora nos vamos a centrar en medios uniáxicos sin actividad óptica en los que, por ejemplo

$$\begin{aligned} n_x &= n_y = n_o \\ n_z &= n_e \end{aligned}$$

donde n_o se denomina *índice ordinario* y n_e *índice extraordinario*.

$$|M| = \left[\mathbf{k}^2 - \left(n_o \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{\left(n_e \frac{\omega}{c} \right)^2} + \frac{k_z^2}{\left(n_o \frac{\omega}{c} \right)^2} - 1 \right). \quad (9.14)$$

Como $|M| = 0$, se debe anular uno de los dos factores. Si es el primero, el vector de ondas debe estar sobre una esfera de radio $n_o \frac{\omega}{c}$; si es el segundo, sobre un elipsoide de revolución de semiejes $n_e \frac{\omega}{c}$, $n_e \frac{\omega}{c}$, $n_o \frac{\omega}{c}$ (también se pueden anular ambos factores a la vez).

A las superficies dadas por la condición de anulación de $|M|$ las llamamos *superficies de vectores de onda*. Ambas coinciden (y comparten plano tangente) en el eje z . A ese eje se le denomina *eje óptico*. Es el eje donde la constante dieléctrica tiene un valor diferente al de los otros dos ejes principales.

Imaginemos una onda que se propague en una dirección del espacio. Para dicha onda, en un medio anisótropo uniáxico, tenemos dos vectores de onda distintos: el que está sobre la esfera (*onda ordinaria*) y el que está sobre el elipsoide (correspondiente a la *onda extraordinaria*). A partir de ahora todos los problemas se nos desdoblan, puesto que tenemos que caracterizar la propagación de ambas.

Para la onda ordinaria, el módulo del vector de ondas $|\mathbf{k}_o| = n_o \frac{\omega}{c}$ siempre será el mismo. Así ocurre, también con la velocidad de fase $v_o = \frac{c}{n_o}$.

Para la onda extraordinaria, tomando coordenadas esféricas r, ϕ, θ (radial, polar, acimutal)

$$\mathbf{k}_e = |\mathbf{k}_e| (\sin \phi \cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \phi \sin \theta \mathbf{u}_y + \cos \phi \mathbf{u}_z) \quad (9.15)$$

Si llevamos esto a la condición de anulación del factor correspondiente tendremos

$$|\mathbf{k}_e| = \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \phi + n_e^2 \cos^2 \phi}} \frac{\omega}{c} \quad (9.16)$$

Este módulo tiene simetría de revolución en torno al eje óptico. Igualmente, podemos preguntarnos por la velocidad de fase

$$v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_e|} \quad (9.17)$$

para la que

$$v_f^2 = v_e^2 \sin^2 \phi + v_o^2 \cos^2 \phi$$

donde $v_e = c/n_e$ y $v_o = c/n_o$.

Hay dos vectores de onda en todas las direcciones del espacio salvo en la del eje óptico, donde sólo hay una onda. Para medios biáxicos esto ocurre para dos direcciones del espacio (los dos ejes ópticos); en el resto hay dos vectores de onda. Lo que tenemos que hacer ahora es llevar los dos vectores de onda a la ecuación de autovalores y calcular los \mathbf{E}_0 correspondientes. Para simplificar el problema (reduciéndolo en una dimensión) vamos a aprovechar la simetría en torno al eje z disponiendo los ejes x, y de modo que $k_x = 0$. Entonces \mathbf{M} queda

$$\begin{bmatrix} (n_x \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_y \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ 0 & k_z & (n_z \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{bmatrix}.$$

Fase y polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria

Onda ordinaria

Si el vector de ondas está sobre la esfera (sobre el círculo) y no coincide con el eje z ($k_y \neq 0$) entonces cumple $k_y^2 + k_z^2 = (n_o \frac{\omega}{c})^2$

$$\begin{bmatrix} (n_x \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_y \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ 0 & k_z & (n_z \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0.$$

por la condición de onda ordinaria $0 \times E_{0x} = 0$, con lo que nos queda como subsistema

$$\begin{pmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_y & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.18)$$

la condición necesaria para que tenga solución es que esta submatriz tenga determinante nulo, pero eso es contradictorio, porque equivale a decir que el vector de ondas está sobre el elipsoide (y por hipótesis está sobre la esfera). Por lo tanto se tiene que verificar

$$\begin{aligned} E_{0y} &= E_{0z} = 0 \\ E_{0x} &\neq 0 \end{aligned}$$

En otras palabras,

- La onda ordinaria está linealmente polarizada, vibrando perpendicularmente al plano que contiene al vector de ondas y al eje óptico.
- Para la onda ordinaria, \mathbf{E}_0 sí es perpendicular a \mathbf{k} : energía y fase se propagan en la misma dirección. $\langle \mathbf{S} \rangle \propto \mathbf{k}$.

- Esta onda sólo se distingue de la que atraviesa un medio isótropo en que está obligatoriamente linealmente polarizada del modo descrito.

Onda extraordinaria

La ecuación que define la onda extraordinaria es

$$\frac{k_y^2}{(n_e \frac{\omega}{c})^2} + \frac{k_z^2}{(n_o \frac{\omega}{c})^2} = 1.$$

Vamos a apartar para más tarde el estudio de la propagación según el eje óptico, por lo que $k_y \neq 0$. Si llevamos la condición para \mathbf{k}_e a la ecuación de autovalores y aprovechando la simetría de revolución, tenemos dos subsistemas (primera fila y últimas dos, respectivamente, de la matriz)

$$\begin{bmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ 0 & k_z & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

se deduce que $E_{0x} = 0$, y por consiguiente el subsistema

$$\begin{pmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_y & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

tiene solución distinta de la trivial, porque su determinante vale, por hipótesis, 1. Resolviendo: esta ecuación resulta

$$\mathbf{E}_0 \propto \begin{pmatrix} 0 \\ n_e^2 k_z \\ -n_o^2 k_y \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

Conclusiones:

- La luz es linealmente polarizada (campo proporcional a un vector real), y está en el plano determinado por k y el eje óptico.
- En general $E_0 \not\perp k$ ya que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \propto (n_{or}^2 - n_e^2) k_y k_z \quad (9.20)$$

salvo en el caso $k_z = k_x = 0$ (k_y lo estamos excluyendo de momento). Dicho de otro modo, siempre que k sea perpendicular al eje óptico, $k \perp E_0$, pero sólo en ese caso. La energía y la fase se propagan cada una por su cuenta.

Eje óptico

Cuando el vector de ondas está en la dirección del eje óptico, sólo hay una onda (la ordinaria y la extraordinaria coinciden). Se cumple $k_y = k_x = 0$ y $\mathbf{k} = n_o \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$. Esto en nuestra ecuación de autovalores significa más ceros en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_e \frac{\omega}{c})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0 \quad (9.21)$$

de donde $E_{0z} = 0$ y E_{0x}, E_{0y} son libres.

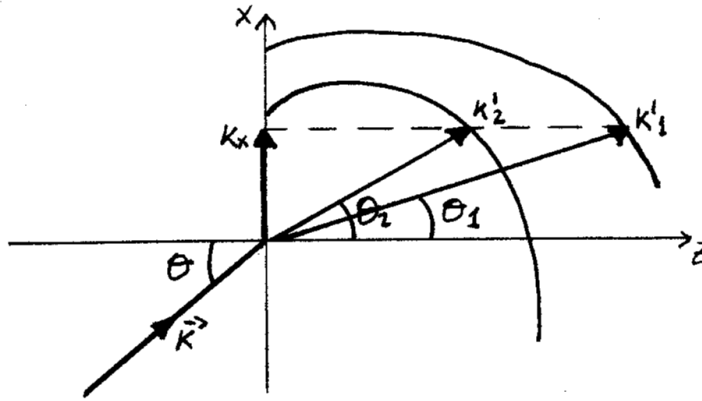


Figura 9.4: Diagrama de la interfase y las ondas que intervienen.

Conclusiones:

- Cualquier estado de polarización es posible.
- $E \cdot k = 0$ por lo que fase y energía van en la misma dirección.
- En este caso particular la onda ve un medio isótropo: si nos movemos por el eje z el índice en todas las direcciones laterales es el mismo. Es natural que el resultado sea el mismo que para una oap en un medio isótropo.

Doble refracción

Vamos a examinar ahora qué ocurre cuando hay una discontinuidad de índice y uno de los medios es anisótropo. La superficie de separación la supondremos plana.

Para saber si hay o no ondas reflejada y transmitida debemos preguntarlo a las ecMm. Si las hubiera les asignaríamos una superposición de oap:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{R}e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} + \omega'' t)} + \dots \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{T}e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para los campos no varían porque uno de los medios sea anisótropo. Si las aplicamos obtendremos la igualdad

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}$$

en $z = 0$ (la interfase),

$$\begin{aligned} k_x &= k'_x = k''_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta \\ k_y &= k'_y = k''_y = 0 \end{aligned}$$

(la segunda componente se anula por elección de ejes). Es decir, todos los vectores de onda están en el plano de incidencia.

A partir de aquí comienzan las diferencias. En general el módulo del vector de ondas depende de la dirección en un medio anisótropo. Lo que sí sabemos es que el vector de ondas debe estar

1. sobre el plano de incidencia

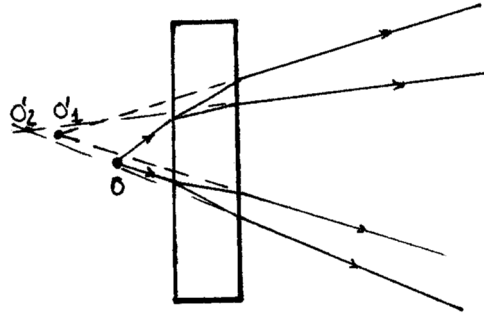


Figura 9.5: Formación de dos imágenes al atravesar la luz un medio anisótropo.

2. sobre la superficie de vectores de onda

En la Figura 9.4 vemos que el vector de ondas de la onda transmitida puede ser uno de los dos que tienen la misma componente k_x y cumplen las dos exigencias planteadas (cortamos las superficies de vectores de onda con el plano de incidencia, obteniendo dos curvas). Utilizando la notación de la Figura 9.4

$$\begin{aligned} |k'_x| &= |\mathbf{k}'_1| \sin \theta'_1 = |\mathbf{k}| \sin \theta = k_x \\ |\mathbf{k}'_2| \sin \theta'_2 &= |\mathbf{k}| \sin \theta \end{aligned}$$

En general habrá dos ondas refractadas, ya que hay dos vectores de onda que satisfacen las condiciones de frontera³. A esta propiedad se la llama doble refracción o *birrefringencia*. Esto significa que al mirar objetos a través de medios anisótropos se ven dobles.

Por ser $|\mathbf{k}'_1|$ y $|\mathbf{k}'_2|$ funciones de los respectivos ángulos no hay una ley simple de tipo SNELL. Hay que utilizar las dos últimas ecuaciones que hemos escrito, y las dificultades de cálculo son mucho mayores. Interpretación microscópica: la frecuencia de resonancia de los osciladores microscópicos ya no es isótropa. Es como si hubiera 2 medios superpuestos.

No vamos a abordar la especificación de otros parámetros de la onda (fórmulas de FRESNEL, coeficientes de reflexión, etc.). Solamente vamos a comentar un resultado: si concebimos un medio uniáxico cuyo eje óptico esté en el plano de incidencia o sea perpendicular a él se cumple que una onda incidente polarizada linealmente según la dirección perpendicular da lugar a una onda refractada con polarización también perpendicular $\perp \Rightarrow \perp$ y $\parallel \Rightarrow \parallel$. Esta es una circunstancia especial en que ocurre lo mismo que en medios isótropos en cuanto a separación de componentes paralela y perpendicular.

ELEMENTOS ANISÓTROPOS

Láminas retardadoras

El propósito de estos dispositivos es cambiar la diferencia de fase entre dos ondas. Ya que en los medios anisótropos las dos ondas van a distinta velocidad, se producen desfases de una onda respecto a la otra. Una lámina retardadora puede ser una lámina planoparalela de un medio uniáxico.

³ En un medio isótropo la superficie de vectores de onda tenía una sola hoja, de modo que sólo había un vector de onda que cumpliera las condiciones

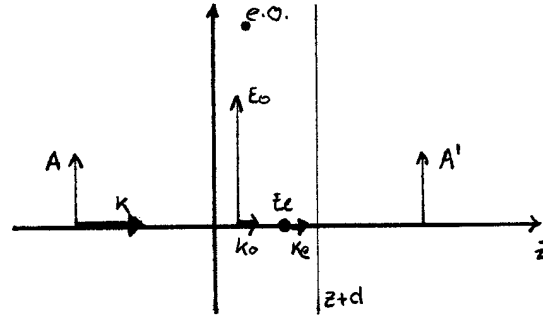


Figura 9.6: Lámina planoparalela de anchura d . El eje óptico es perpendicular al plano del papel. La incidencia es normal, según el eje z .

Para ver lo que pasa sólo tenemos que caracterizar la propagación y relacionar las amplitudes complejas de la onda incidente y de la emergente. Con el sistema de referencia de la Figura 9.6 se cumple

$$k_x = k_y = 0$$

Los dos posibles vectores de onda son

$$\mathbf{k}_o = n_o \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{k}_e = n_e \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$$

(si es \perp al e.o.). Ambos vectores de onda están sobre el eje z . El campo eléctrico de la ordinaria vibra en el plano del papel (eje x) y el de la extraordinaria ortogonal a éste (y).

Para no tener que acudir a las fórmulas de FRESNEL, nos apoyamos en que el medio es transparente y los coeficientes de transmisión deben ser, por analogía al caso isótropo, próximos a 1. Con esta aproximación,

- la onda ordinaria estará excitada sólo por la componente x de la onda incidente

$$E_x(z+d) = A_x e^{i(k_o(z+d)-\omega t)} = e^{ik_o d} E_x(z)$$

- la componente y excita la onda extraordinaria

$$E_y(z+d) = A_y e^{i(k_e(z+d)-\omega t)} = e^{ik_e d} E_y(z)$$

Esa misma relación, en términos de amplitudes es

$$A'_x = e^{ik_o d} A_x$$

$$A'_y = e^{ik_e d} A_y$$
(9.22)

el cambio de fase es distinto para cada componente, en virtud de la anisotropía ($k_e \neq k_o$). A efectos de polarización podemos escribir las relaciones anteriores como

$$A'_x = A_x$$

$$A'_y = e^{i\delta} A_y$$
(9.23)

donde δ es la diferencia de fases entre las componentes de la onda emergente.

$$\delta = (k_e - k_o) d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d \quad (9.24)$$

y λ es la longitud de onda en el vacío. Una escritura matricial es

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \mathbf{PR} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

la matriz se llama *matriz de Jones de la lámina retardadora*. Los ejes en los que la matriz de JONES es diagonal se llaman *ejes de la lámina*. Cuando la lámina se rota un ángulo α , entonces se utiliza $\mathbf{R}_\alpha^{-1} \mathbf{PR} \mathbf{R}_\alpha$, donde \mathbf{R}_α es la matriz de rotación (3.29)

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Comentarios:

- La lámina cambia estados de polarización cambiando la fase relativa entre las dos componentes del campo. Es una forma cómoda y sencilla de hacerlo, porque la luz ni siquiera se desvía.
- El desfase introducido depende del grosor de la lámina.
- El desfase introducido depende de la longitud de onda incidente.
- Si el campo eléctrico vibra en la dirección del eje óptico, luz lineal se convertiría en luz lineal. Es decir, si la luz vibra según uno de los ejes de la lámina, *la lámina no cambia su estado de polarización*, porque no hay dos componentes que desfazar.

Las láminas de espesor variable se llaman *compensadores* y son muy útiles. Las láminas de espesor fijo son *específicas de una longitud de onda*.

EJEMPLO Lámina cuarto de onda

Dentro de las láminas de espesor fijo, vamos a estudiar la *lámina cuarto de onda* (o $\frac{\lambda}{4}$), que es aquella que introduce un desfase múltiplo impar de $\pi/2$

$$\delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Para ello

$$d = \frac{2m + 1}{n_e - n_o} \frac{\lambda}{4}$$

en sus ejes,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$$

Una aplicación es convertir luz linealmente polarizada en elípticamente polarizada, pero con la particularidad de que los ejes de la elipse de luz emergente coinciden con los ejes de la lámina.

$$\begin{aligned} &\text{lineal} \leftrightarrow \text{elíptica} \\ &\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \pm i \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De este modo, sabemos cómo está orientada la elipse. Si el azimut del haz incidente es $\theta = \pi/4$ se obtiene luz circularmente polarizada.

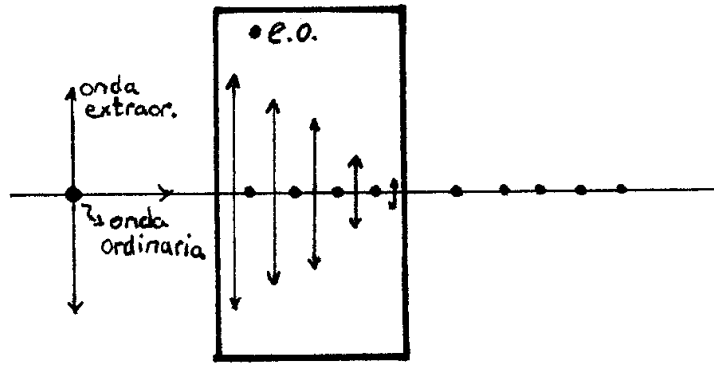


Figura 9.7: Para la onda ordinaria se produce absorción con la propagación. Si el espesor es suficiente el medio eliminará la onda ordinaria. La onda extraordinaria pasa sin sufrir absorción.

Como vemos, la lámina retardadora es capaz de transformar el estado de polarización de un haz incidente. No obstante, cuando incide directamente luz natural sobre dicha lámina retardadora, como el desfase en cualquier par de componentes es aleatorio, la introducción de una fase extra no cambia la aleatoriedad de la diferencia de fase y, por consiguiente, no hay efecto sobre la luz. Es por ello que estos elementos son efectivos únicamente con luz polarizada.

Medios absorbentes; dicroísmo; polaroides

El objetivo es obtener luz polarizada. Pensemos en un medio anisótropo uniáxico (dos constantes dieléctricas, ϵ_e y ϵ_o). Podemos imaginar una situación en la cual una de estas constantes dieléctricas fuera compleja para la frecuencia de interés. Entonces el medio sería absorbente para una de las ondas y transparente para la otra. Por ejemplo

$$\begin{aligned} n_o &\longrightarrow n_o + i\kappa_o \\ n_e &\longrightarrow n_e \end{aligned}$$

con $\kappa_o(\omega) \neq 0$.

Este fenómeno de absorción selectiva recibe el nombre de *dicroísmo* y los medios que producen este efecto se llaman *dicroicos*. Hay cristales naturales dicroicos, pero los materiales más utilizados son láminas de alcoholes de polivinilo estiradas y dopadas con yodo. La ventaja es que se pueden construirse en tamaños arbitrarios.

Las ondas armónicas no son físicamente realizables pues presentan una duración temporal infinita. Por consiguiente, las ondas reales no son armónicas presentan varias frecuencias temporales. En este tema se aborda la generación de paquetes de onda, que son superposición de ondas planas de distintas frecuencias. En el vacío, todas las ondas se propagan con la velocidad de la luz, independientemente de su frecuencia, por lo que los paquetes de onda no se deforman. Sin embargo, en los medios materiales hay una cierta dispersión, que hace que la velocidad para cada frecuencia sea distinta. Esto produce una distorsión de los paquetes de luz a medida que se propagan por los medios materiales. Dicho efecto es importante en aplicaciones tales como en transmisión de información por fibras ópticas, donde un ensanchamiento de los pulsos puede suponer una pérdida de información.

Índice

10.1	Introducción	144
10.2	Propagación de dos ondas planas en el vacío o un medio material de índice constante	144
10.2.1	Efecto Doppler	145
10.3	Propagación de dos ondas planas en un medio dispersivo	146
10.4	Paquete de ondas	147
10.5	Determinación del espectro de un pulso de luz: amplitud de cada frecuencia	148
10.5.1	Ondas de duración finita u ondas cuasi-monocromáticas	148
10.5.2	Pulso exponencial	150
10.5.3	Pulso gaussiano	151
10.6	Propagación de un paquete Gaussiano en el vacío	151
10.7	Paquete gaussiano propagándose en un medio dispersivo	152
10.8	Vector de Poynting de una onda con distintas frecuencias temporales	154

OBJETIVOS

- Describir la luz no armónica como superposición de ondas armónicas.
- Calcular el espectro de una onda no armónica: paquete de ondas \Leftrightarrow luz policromática.
- Calcular la velocidad de grupo que lleva un paquete de ondas.
- Calcular la energía que transporta un paquete de ondas.

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos trabajado casi exclusivamente con ondas armónicas planas. Sin embargo, este tipo de ondas, útil por la sencillez de las soluciones, no es físicamente realizable. Por un lado la onda no puede ser espacialmente infinita, pues transportaría una energía infinita. El tratamiento de ondas espacialmente localizadas lo abordaremos en el Capítulo 15 dedicado a la Difracción. Por otro lado, las ondas no pueden ser puramente armónicas, pues suponen una duración temporal infinita, es decir, se debería haber creado en $t = -\infty$ y finalizar en $t = +\infty$. Por consiguiente, si queremos realizar un tratamiento más realista de la luz, debemos abordar el problema de las ondas no armónicas y no planas. Este tipo de ondas presentan más de una frecuencia temporal. Afortunadamente, las ecuaciones de Maxwell son lineales, por lo que la superposición de dos o más ondas electromagnéticas también es solución de las ecuaciones de Maxwell. Utilizaremos esta característica, que permite obtener nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas, para poder determinar el campo eléctrico propagado cuando las ondas no son armónicas. Para ello, el procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Descomponer el campo inicial en sus componentes espectrales, es decir en ondas armónicas. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que todas las componentes son planas y se propagan en la misma dirección z .
2. Asignar a cada componente espectral su índice de refracción específico $n(\omega)$ y, con ello, su propia velocidad de fase, $v_f(\omega) = c/n(\omega)$.
3. Propagar cada onda armónica según la solución que conocemos, $\mathbf{E}_\omega(z, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(k(\omega)z - \omega t)]$, donde $k(\omega) = n(\omega)k_0 = n(\omega)\omega/c$.
4. El campo eléctrico final es la combinación lineal de todas las ondas monocromáticas involucradas.

En el presente Capítulo veremos, en primer lugar, el caso más sencillo de una onda no armónica, que es la composición de dos ondas armónicas planas en el vacío. Veremos este mismo caso en un medio material dispersivo. Posteriormente, analizaremos el concepto de velocidad de grupo, que es la velocidad a la que se propaga la amplitud. Aprenderemos a descomponer un cierto paquete de ondas en ondas armónicas. Seguiremos, mediante un análisis del caso general de propagación de un paquete de ondas arbitrario, analizado mediante la descomposición en ondas armónicas. Como caso de más interés, estudiaremos la propagación de un paquete de ondas gaussiano, tanto en un medio no dispersivo como en un medio dispersivo. Finalizaremos el capítulo determinando la energía que se propaga con un pulso de luz. Sin pérdida de generalidad, en el presente capítulo asumimos que las ondas son planas y se propagan en la misma dirección de forma que $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = k \cdot \mathbf{z}$.

PROPAGACIÓN DE DOS ONDAS PLANAS EN EL VACÍO O UN MEDIO MATERIAL DE ÍNDICE CONSTANTE

Como primer ejemplo de un paquete de ondas consideraremos el más sencillo posible, la superposición de dos ondas monocromáticas planas de la misma amplitud y con frecuencias ligeramente diferentes, $\omega_1 = \bar{\omega} - \Delta\omega/2$ y $\omega_2 = \bar{\omega} + \Delta\omega/2$, que se propagan en la dirección z por el vacío o un medio material de índice de refracción constante n . Por simplicidad, la amplitud de las dos ondas es la misma, y también el estado de polarización. El campo en cualquier punto del espacio resulta

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}. \quad (10.1)$$

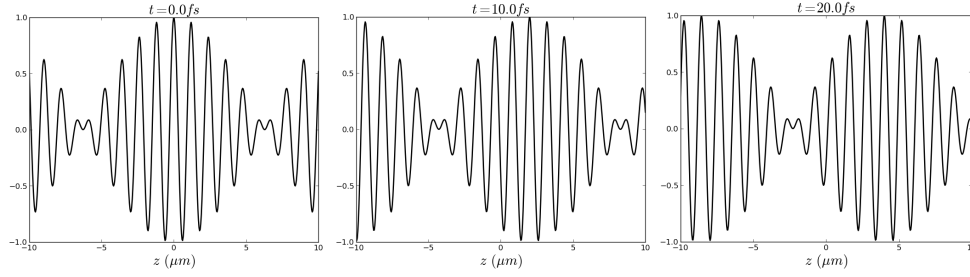


Figura 10.1: Desplazamiento de un paquete formado por dos ondas de frecuencias parecidas. En este caso $\omega_1 = 1,00e15$ Hz y $\omega_2 = 1,10e15$ Hz respectivamente. El índice de refracción es $n = 1,5$.

Cuando el medio es no dispersivo, la relación entre k y ω es $k = n\omega/c$ para todas las ondas. Entonces, el campo se puede escribir como

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\bar{\omega} - \Delta\omega/2)\tau} + \mathbf{E}_0 e^{i(\bar{\omega} + \Delta\omega/2)\tau}, \quad (10.2)$$

donde $\tau = nz/c - t$. Haciendo factor común y sabiendo que $\cos(x) = [\exp(ix) + \exp(-ix)]/2$, esta onda se expresa como

$$\mathbf{E}(z, t) = 2\mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right) e^{i\bar{\omega}\tau}. \quad (10.3)$$

Como podemos ver, la fase $\exp(i\bar{\omega}\tau)$ y la amplitud $2\mathbf{E}_0 \cos(\Delta\omega\tau/2)$ varían con el tiempo de distinta forma. La velocidad de la fase y de la amplitud, es c/n en ambos casos, pero la frecuencia es $\bar{\omega}$ para la fase y $\Delta\omega/2$ para la amplitud. Esto significa que, al pasar el tiempo, el paquete de ondas se mueve en el espacio, pero tiene exactamente la misma forma, Figura 10.1.

La superposición de únicamente dos ondas con distinta frecuencia no produce un único pulso de luz, sino una distribución periódica de pulsos, puesto que la amplitud varía de forma cosenoidal. Para generar un único paquete necesitamos una distribución continua de ondas armónicas planas, que veremos posteriormente.

Si se calcula la intensidad (2.10) que tiene esta superposición de dos ondas armónicas resulta

$$I = |\mathbf{E}(z, t)|^2 = 4|\mathbf{E}_0|^2 \cos^2[(nz/c - t)\Delta\omega/2]. \quad (10.4)$$

Es decir, para una cierta posición z se observa un batido periódico en la intensidad de la luz cuya frecuencia no es la frecuencia de las ondas sino la diferencia de frecuencia. Esta técnica, denominada detección de batidos o detección heterodina se utiliza para determinar la frecuencia de una onda conocida la frecuencia de otra. Si la diferencia de frecuencias es muy pequeña es posible que este batido en la intensidad de la luz sea detectable mediante técnicas convencionales.

Efecto Doppler

Se denomina efecto Doppler al cambio en la frecuencia de la luz (también de otra onda, como la del sonido) procedente de una fuente en movimiento relativo respecto al observador. El efecto Doppler se observa fácilmente en el sonido de una sirena cuando pasa cerca de nosotros y está relacionado a que cuando nos acercamos a la fuente el periodo de la señal observada varía respecto a la emitida. Por ejemplo, cuando estamos en un coche la cantidad de lluvia que cae en el parabrisas aumenta al aumentar la velocidad pues “nos acercamos” a la lluvia.

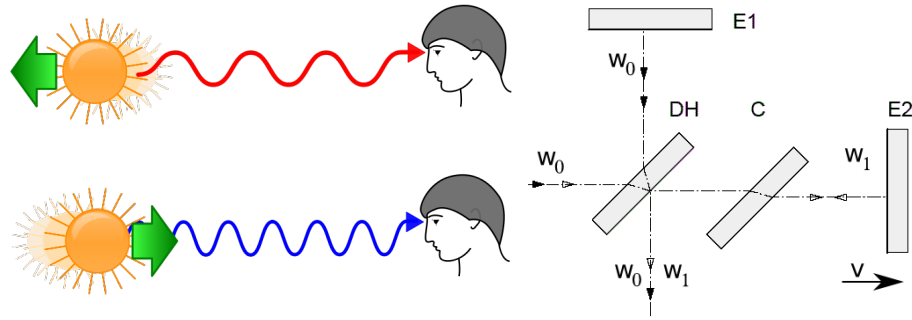


Figura 10.2: (a) Desplazamiento al rojo o al azul en función del movimiento relativo de la fuente al observador. (b) Detección heterodina cuando uno de los objetos se mueve. Se produce un efecto Doppler que modifica la frecuencia del haz reflejado. Si se combinan ambos haces se produce batido de frecuencias observable con la electrónica actual (MHz-GHz).

Esto produce un menor tiempo en la llegada de gotas de agua (periodo) y por consiguiente un aumento de la frecuencia.

Debido a que la luz es una onda electromagnética cuya velocidad en el vacío es constante independientemente del movimiento de la fuente (teoría de la relatividad) su explicación sale de esta asignatura. No obstante indicaremos que la frecuencia observada viene dada por la siguiente expresión

$$\omega_0 = \omega_e \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (10.5)$$

donde ω_0 es la frecuencia observada, ω_e es la frecuencia emitida por la fuente, v es la velocidad de la fuente y c es la velocidad de la luz. La frecuencia observada será mayor o menor a la emitida dependiendo si la fuente se acerca (corrimiento al azul) o se aleja (corrimiento al rojo), Figura 10.2a. Cuando la fuente se mueve a velocidad mucho menores a la velocidad de la luz

$$\omega_0 \approx \omega_e \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (10.6)$$

El desplazamiento Doppler se ha utilizado para la determinar el movimiento de objetos astronómicos distantes. Asimismo tiene diversas aplicaciones prácticas. Mediante la combinación de dos frecuencias, una de referencia y otra proveniente del reflejo sobre un objeto en movimiento es posible determinar su velocidad (y mediante integración el desplazamiento) de un objeto respecto al sistema de referencia. Este es el mecanismos del radar Doppler y del interferómetro por detección heterodina, Figura 10.2b.

También existen dispositivos para producir una pequeña variación de la frecuencia de la onda, como moduladores acustoópticos y redes de difracción en movimiento, que hace que podamos tener dos haces con frecuencias ligeramente distintas.

PROPAGACIÓN DE DOS ONDAS PLANAS EN UN MEDIO DISPERSIVO

Veamos ahora el mismo ejemplo, pero donde los índices de refracción para las dos ondas armónicas son n_1 y n_2 . Esto va a producir que el vector de ondas para las dos ondas sea $k_1 = n_1\omega_1/c$ y $k_2 = n_2\omega_2/c$ respectivamente. Si escribimos

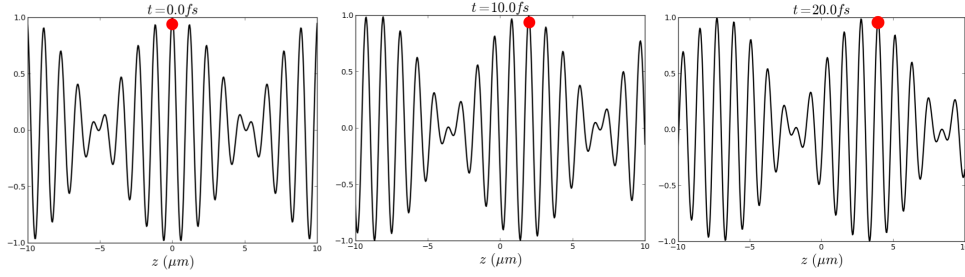


Figura 10.3: Desplazamiento de un paquete formado por dos ondas de frecuencias parecidas en un medio dispersivo. En este caso $\omega_1 = 1,00e15 \text{ Hz}$ y $\omega_2 = 1,10e15 \text{ Hz}$ respectivamente y el índice de refracción es $n_1 = 1,5$ y $n_2 = 1,53$. Se muestra en rojo la posición del máximo de la fase, que se desplaza respecto al máximo de la envolvente (amplitud), pues la amplitud y la fase no tienen la misma velocidad.

$k_1 = \bar{k} - \Delta k/2$ y $k_2 = \bar{k} + \Delta k/2$ y utilizando el procedimiento anterior, se obtiene que la suma de las dos ondas produce un campo eléctrico de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{E}_0 \cos(\Delta k z - \Delta \omega t) e^{i(\bar{k}z - \bar{\omega}t)}. \quad (10.7)$$

Esto significa que ahora la amplitud y la fase se propagan de distinta forma, Figura 10.3,

$$\begin{aligned} v_f &= \bar{\omega} / \bar{k}, \\ v_g &= \Delta \omega / \Delta k. \end{aligned} \quad (10.8)$$

A la velocidad de la amplitud, se denomina velocidad de grupo. Si las dos frecuencias están muy próximas entre sí, podemos calcular la velocidad de grupo en función de la velocidad de fase

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k \frac{d(v_f)}{dk}. \quad (10.9)$$

Si queremos desarrollar esta ecuación en función de las frecuencias

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{d(\omega/v_f)}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{v_f} + \omega \frac{d(1/v_f)}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (10.10)$$

Luego analizaremos un poco más este concepto de velocidad de grupo.

PAQUETE DE ONDAS

En el caso general, en lugar de 2 ondas tenemos una distribución continua de ondas armónicas planas. Entonces la suma se convierte en una integral y el campo eléctrico formado por la superposición, en representación compleja, resulta (Figura 10.4)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0,\omega}(\mathbf{r}) e^{i[g_\omega(\mathbf{r}) - \omega t]} d\omega, \quad (10.11)$$

donde cada frecuencia ω tiene una amplitud $\mathbf{E}_{0,\omega}(\mathbf{r})$ y una dependencia de la fase $g_\omega(\mathbf{r})$ distinta. El término $g_\omega(\mathbf{r})$ representa distintas ondas armónicas propagándose en diferentes direcciones. Definiremos paquete de ondas al caso de superposición de ondas planas con distinta amplitud y frecuencia que se propagan en una misma dirección. Supondremos que esta dirección es z , por lo que $\mathbf{k}_\omega = k_\omega \mathbf{u}_z$ y la integral anterior se simplifica

paquete de ondas

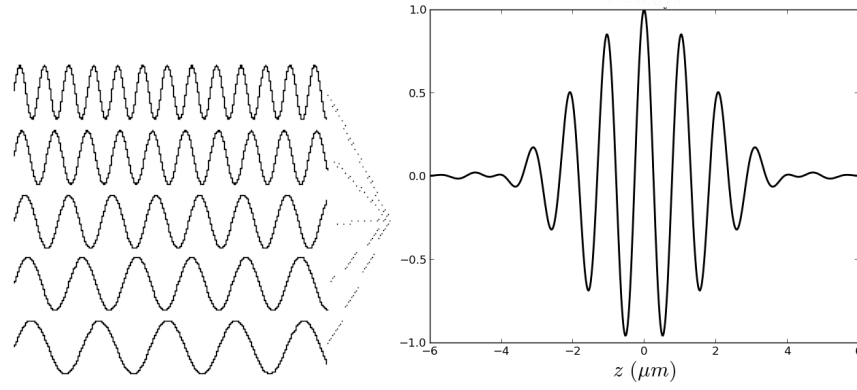


Figura 10.4: La suma de ondas armónicas de distintas frecuencias produce un paquete localizado de energía finita.

$$\mathbf{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0,\omega} e^{i(k_{\omega}z - \omega t)} d\omega, \quad (10.12)$$

donde k_{ω} implica la existencia de una dependencia de k con ω . Para el vacío, esta dependencia es sencilla, $k_{\omega} = \omega/c$. Para los medios materiales, resulta $k_{\omega} = n(\omega)\omega/c$ y la velocidad de grupo viene dada por

$$v_g = \frac{1}{\left| \nabla \frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \omega} \right|_{\bar{\omega}}}. \quad (10.13)$$

DETERMINACIÓN DEL ESPECTRO DE UN PULSO DE LUZ: AMPLITUD DE CADA FRECUENCIA

Si tenemos una amplitud inicial del campo para un cierto punto en el espacio $z = 0$, $\mathbf{E}(z = 0, t)$ podemos determinar la amplitud de cada una de las frecuencias armónicas. Para ello simplemente es necesario calcular la transformada inversa de Fourier del campo eléctrico

$$\mathbf{E}_{0,\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z = 0, t) e^{i\omega t} dt = ITF[\mathbf{E}(z = 0, t)], \quad (10.14)$$

donde la transformada de Fourier inversa se hace sobre cada componente del campo. Como ejemplo más sencillo, si tenemos una onda armónica plana, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega_0 t)}$, con $k = \omega_0/c$, $\mathbf{E}(z = 0, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t}$. Para este caso, esta integral se reescribe como

$$\mathbf{E}_{0,\omega} = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \mathbf{E}_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (10.15)$$

Esto significa que una onda monocromática solamente tiene una frecuencia en ω_0 , como ya sabíamos.

Ondas de duración finita u ondas cuasi-monocromáticas

Como hemos dicho anteriormente, no existen mecanismos de generación de ondas puramente monocromáticas, puesto que esto implicaría que la onda tuviera una duración infinita (la de los láseres, en términos prácticos se le parece mucho). Los procesos de generación de ondas (en los átomos) tienen una duración finita

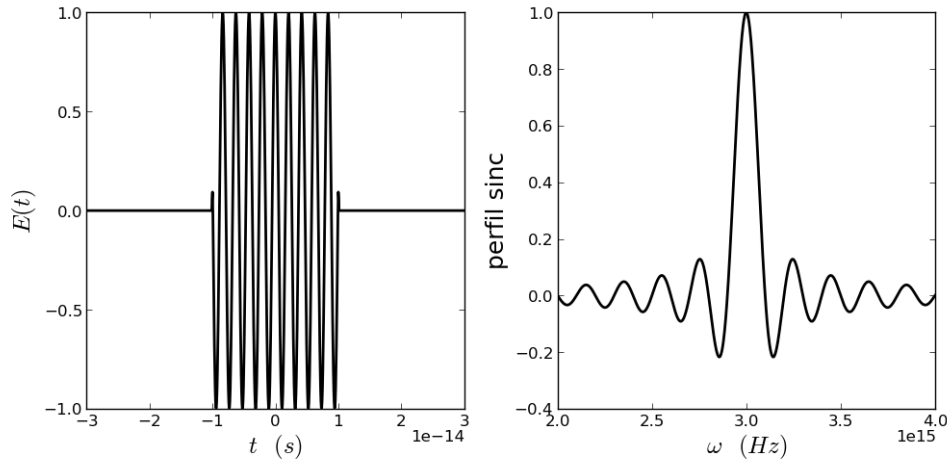


Figura 10.5: Ejemplo de onda armónica de intervalo finito temporal y su descomposición espectral. Este tipo de ondas ya no es una onda armónica propiamente dicha pues su espectro no es puntual. Si la anchura del pulso es Δt , entonces la anchura espectral es $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$.

muy corta, pero que normalmente generan una gran cantidad de periodos. El efecto del tamaño finito de las ondas hace que las ondas no sean monocromáticas, sino que exista una cierta dependencia con la frecuencia angular ω . Veamos ahora cuál es el efecto de considerar paquetes de onda de duración finita. Supongamos que la onda en una cierta posición $z = 0$ tiene una frecuencia espacial ω_0 y la duración de la onda es Δt . Entonces la onda se puede describir como

$$E(t) = E(z=0, t) = \begin{cases} E_0 e^{-i\omega_0 t} & -\frac{\Delta t}{2} < t < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (10.16)$$

Esta onda se puede escribir, como la ecuación (10.12), es decir, como superposición de ondas armónicas planas. Para ello, tenemos que determinar la distribución espectral, que se obtiene a partir de la transformada inversa de Fourier de la onda

$$\begin{aligned} E_{0,\omega} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta t} E_0 \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\Delta t/2]}{(\omega - \omega_0)\Delta t/2}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Como se observa en la Figura 10.5, la componente monocromática que más contribuye a la onda es la que tiene frecuencia $\omega = \omega_0$, pero debido a la finitud temporal de la onda se tienen también otras frecuencias. El primer nulo en las frecuencias, ω_1 , ocurre cuando

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0)\Delta t = \pi. \quad (10.18)$$

Esto significa que cuanto mayor sea la longitud temporal de la onda menor será la anchura espectral o ancho de banda. Si definimos $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, entonces

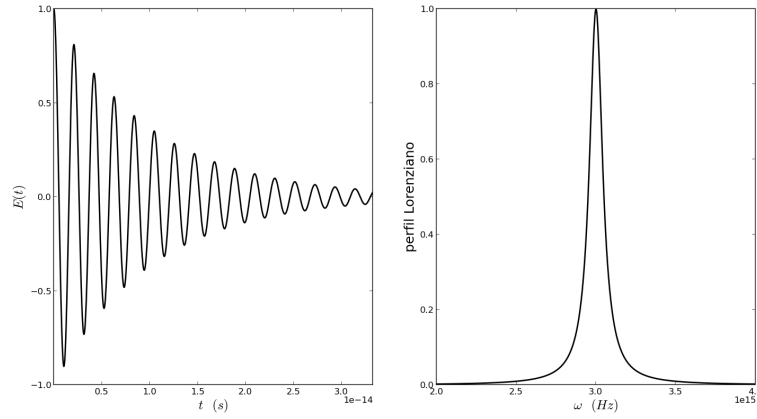


Figura 10.6: Ejemplo de onda exponencialmente decreciente y espectro de potencias, con perfil Lorentziano. En este caso $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ y $\gamma = 10^{14} \text{ Hz}$. No es un caso muy realista pues se producen muy pocas fluctuaciones antes de producirse el decaimiento del electrón.

la anchura espectral del primer pico, que contiene la mayor cantidad de energía resulta

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}. \quad (10.19)$$

Una buena medida del grado de monocromaticidad viene dado por $\Delta\omega/\omega_0$ (o más habitualmente $\Delta\nu/\nu$). Si $\Delta\nu/\nu \ll 1$, la onda es cuasimonocromática. Para frecuencias ópticas, $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ Hz}$, tiempos de pulsos de nanosegundos, $\Delta t \sim 10^{-9} \text{ s}$, producen más de 10^6 fluctuaciones del campo dentro del pulso.

Pulso exponencial

Otro caso interesante es el pulso exponencial, motivado por el modelo de Lorentz de cómo un dipolo pierde energía (4.16), Figura 10.6,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t}, \quad (10.20)$$

donde γ es el tiempo de decaimiento. En este caso, y considerando que \mathbf{r} oscila en la dirección del eje x y observamos en la dirección z nos proporciona el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(z=0, t) \simeq \frac{\omega_0 q r_0}{c^2 z} e^{-(\gamma/2 + i\omega_0)t} \mathbf{u}_x = E_0 \mathbf{u}_x e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t}. \quad (10.21)$$

Utilizando (10.14) la distribución de frecuencias resulta

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{E_0 \mathbf{u}_x}{\gamma/2 - i(\omega - \omega_0)}. \quad (10.22)$$

En este caso, la densidad de energía espectral, esto es, la cantidad de energía electromagnética por unidad espectral que llega por unidad de superficie

$$J(\omega) = \varepsilon_0 c |E_\omega|^2 = J(\omega_0) \frac{1}{1 + 4(\omega - \omega_0)^2/\gamma^2}. \quad (10.23)$$

Este tipo de distribución espectral se denomina perfil Lorentziano y es muy típico de espectros de emisión atómicos, Figura 10.6b. Aquí se observa que la frecuencia de decaimiento γ produce un ensanchamiento espectral de la línea. Cuanto mayor es la frecuencia de decaimiento, menor es la anchura de la línea espectral.

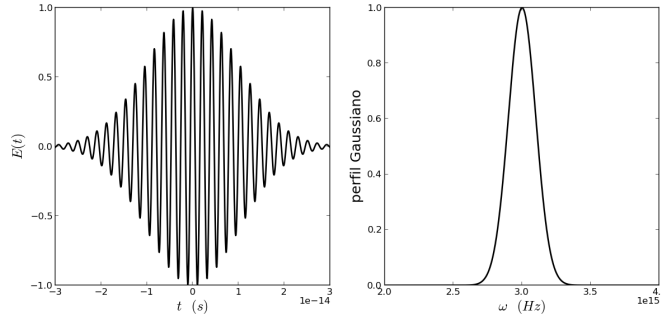


Figura 10.7: Ejemplo de onda exponencialmente decreciente y espectro de potencias, con perfil Gaussiano. En este caso $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ y $\gamma = 10^{14} \text{ Hz}$. No es un caso muy realista pues se producen muy pocas fluctuaciones antes de producirse el decaimiento del electrón.

Pulso gaussiano

El pulso tipo almena anteriormente descrito tiene el problema de que es discontinuo en el campo, lo cual no es la forma en la que normalmente se generan los pulsos de luz. Suele ser más realista un pulso con variación continua, como es el pulso Gaussiano, descrito por una distribución de frecuencias, Figura 10.7

$$E_{0,\omega} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2} \right]. \quad (10.24)$$

El factor $1/(\sqrt{2\pi}\Delta\omega)$ es un factor de normalización de forma que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} \int \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2} \right] d\omega = 1. \quad (10.25)$$

Esta distribución de amplitud tiene un valor máximo en la frecuencia central ω_0 y una anchura $\Delta\omega$. Para frecuencias $|\omega - \omega_0| \gg \Delta\omega$, la amplitud es nula.

PROPAGACIÓN DE UN PAQUETE GAUSSIANO EN EL VACÍO

Ahora que sabemos cómo determinar la distribución espectral de un paquete de ondas, podemos determinar cuál es su propagación. El siguiente paso es propagar cada una de las ondas armónicas en el espacio. Para el caso de un paquete de ondas gaussiano anteriormente descrito, la propagación del paquete de ondas en el espacio (10.12) resulta

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2} \right] e^{i(z n/c - t)\omega} d\omega. \quad (10.26)$$

Esta integral se resuelve según

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a} - c}, \quad (10.27)$$

obteniéndose, Figura 10.8,

$$E(z, t) = E_0 \exp \left[-\frac{(z n/c - t)^2}{2/\Delta\omega^2} \right] e^{i(z n/c - t)\omega_0}. \quad (10.28)$$

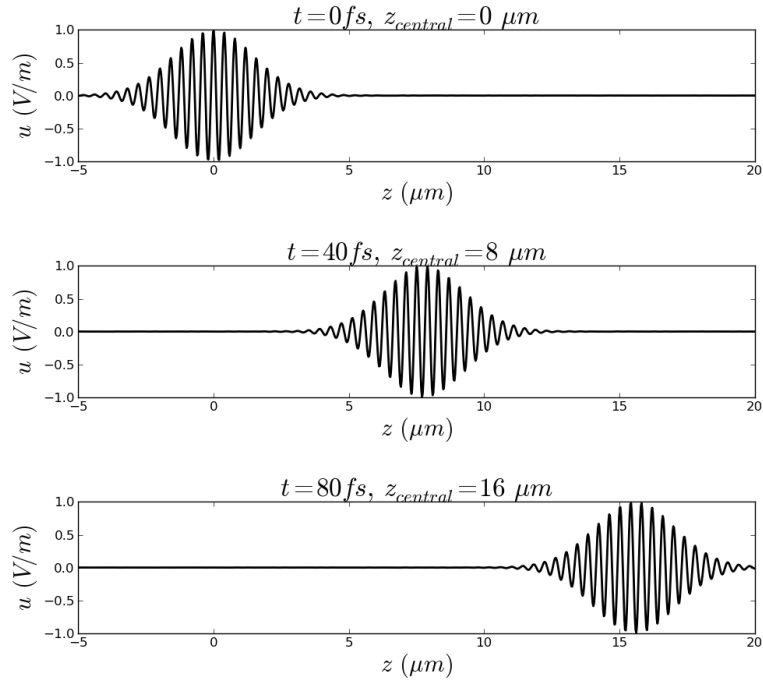


Figura 10.8: Propagación de un paquete Gaussiano en el vacío. El paquete se mantiene exactamente como estaba.

El término constante da cuenta de la normalización del campo. En este caso, al igual que cuando sumamos dos ondas armónicas planas en el vacío, la velocidad de grupo coincide exactamente con la velocidad de fase. Esta ecuación es muy interesante pues indica que la anchura del paquete temporal es inversamente proporcional a la anchura del paquete en frecuencias, $\Delta t = 1/\Delta\omega$. Esto quiere decir que cuando queremos paquetes muy estrechos necesitamos fuentes de luz muy policromáticas. Se pueden generar paquetes de luz con una o muy pocas oscilaciones a partir de láseres de femtosegundos, siendo el espectro muy ancho. Por el contrario, si queremos paquetes de luz con muchas oscilaciones, necesitamos fuentes de luz muy monocromáticas, como los láseres de helio-neón estabilizados en frecuencia.

PAQUETE GAUSSIANO PROPAGÁNDOSE EN UN MEDIO DISPERSIVO

Para estudiar la propagación de un paquete de ondas en un medio dispersivo partimos de la misma ecuación que para el caso no dispersivo (10.26),

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} \mathbf{E}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2}\right] e^{i(z n(\omega)/c - t)\omega} d\omega, \quad (10.29)$$

pero ahora el índice de refracción presenta una cierta dispersión con la frecuencia $n(\omega)$. Esta relación se puede aproximar por la ec. de Cauchy (7.38) o Sellmeier (7.37), aunque analizando la forma del índice de refracción, Figura 10.9, cuando el espectro no es demasiado ancho se puede aproximar de forma sencilla como

$$n(\omega) = n_0 + n_1\omega. \quad (10.30)$$

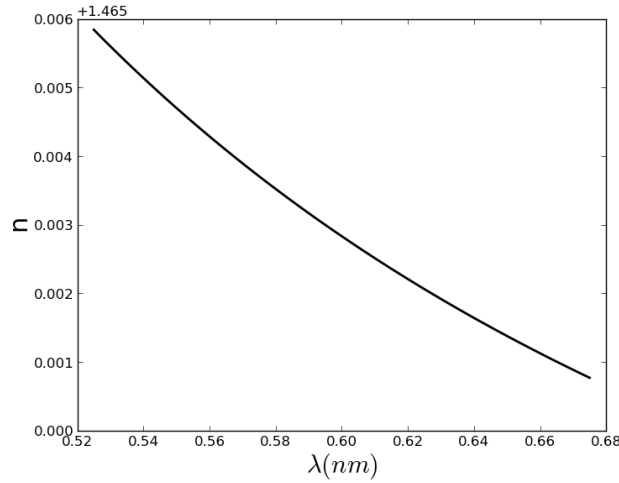


Figura 10.9: Índice de refracción para el silicio.

Téngase en cuenta que n_1 tiene unidades de tiempo. En este caso, las exponenciales solamente tienen términos lineales y cuadráticos y la integral se puede resolver mediante (10.27), resultando

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} \mathbf{E}_0 \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\Delta\omega} - \frac{izn_1}{c}}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2}{2\Delta\omega} - \frac{\left(\frac{izn_0}{c} + \frac{\omega_0}{\Delta\omega} - it \right)^2}{4 \left(-\frac{1}{2\Delta\omega} + \frac{izn_1}{c} \right)} \right]. \quad (10.31)$$

En esta forma no podemos decir gran cosa excepto que la onda deja de ser plana, puesto que el desfase deja de ser lineal con z .

Más interesante todavía es determinar la intensidad, $I(z, t) = |\mathbf{E}(z, t)|^2$ que resulta

$$I(z, t) = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega^2 n_1 z}{c} \right)^2}} \exp \left[-\frac{[z(n_0 + 2n_1\omega_0)/c - t]^2}{\frac{1}{\Delta\omega^2} \left[1 + \left(\frac{2\Delta\omega^2 n_1 z}{c} \right)^2 \right]} \right]. \quad (10.32)$$

La anchura del haz,

$$\omega(z) = \sqrt{1 + (2\Delta\omega^2 n_1 z / c)^2} / \Delta\omega, \quad (10.33)$$

depende de la posición y para distancias mayores que $z_t \gg c/(2\Delta\omega^2 n_1)$ esta anchura aumenta de forma aproximadamente lineal. Un ejemplo de ensanchamiento se muestra en la Figura 10.10.

Si se calcula de forma rigurosa, introduciendo la expresión de Cauchy o Sellmeier para el y no con (10.32) Además del ensanchamiento, se produce un retraso, . Este retraso es debido a que la forma del índice de refracción no es lineal con la frecuencia, sino que tiene una dispersión más compleja (ecuación de Cauchy, Sellmeier). Este retraso se muestra en la Figura 10.10 donde se ha ubicado una línea roja donde debería estar el pulso si se calcula a través de $z_s = ct/n_0$, donde n_0 es el índice de refracción para el centro del espectro gaussiano. Para poder analizarlo habría que considerar una dependencia más compleja del índice de refracción (por ejemplo cuadrática), pero la integral no sería resoluble “de forma tan sencilla”.

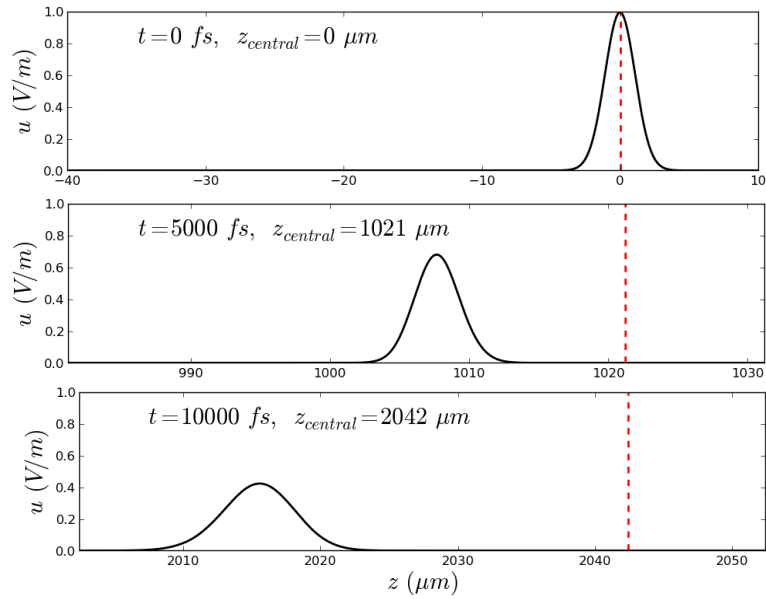


Figura 10.10: Ensanchamiento de la envolvente de un pulso gaussiano centrado en $\lambda = 600 \text{ nm}$ y $\Delta\lambda = 25 \text{ nm}$. Al propagarse el pulso se ensancha y reduce su intensidad pues la energía se conserva. También se produce un ligero retraso no predicho por (10.32).

El ensanchamiento de los pulsos de luz es bastante perjudicial a la hora de propagar información a través de un medio material, como es una fibra óptica, pues los pulsos de luz (paquetes de ondas) se pueden solapar y así perder la información, como se esquematiza en la Figura 10.11.

VECTOR DE POYNTING DE UNA ONDA CON DISTINTAS FRECUENCIAS TEMPORALES

Veamos ahora cómo se propaga la energía del paquete de ondas. Si tenemos el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\omega} \exp[i(kz - \omega t)] d\omega, \quad (10.34)$$

la inducción magnética de cada una de las frecuencias, $\mathbf{E}_{\omega} \exp[i(kz - \omega t)]$ se puede calcular a través del producto vectorial con \mathbf{k}

$$\mathbf{B}_{\omega} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_{\omega}, \quad (10.35)$$

resultando

$$\mathbf{B}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_{\omega} \exp(i[g_{\omega}(r) - \omega t]) d\omega, \quad (10.36)$$

donde \mathbf{E}_{ω} y \mathbf{B}_{ω} son las amplitudes de cada una de las ondas.

Veamos ahora cuál es la distribución de energías, es decir, el vector de Poynting asociado a este tipo de ondas. Según hemos definido el vector de Poynting $\langle \mathbf{S} \rangle(r, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}(r, t) \wedge \mathbf{B}^*(r, t) \}$ necesitamos ahora resolver dos integrales. Para ello, cambiamos la variable de integración en una de ellas $\omega \rightarrow \omega'$

$$\langle \mathbf{S} \rangle(r, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\omega} e^{i[g_{\omega}(r) - \omega t]} d\omega \wedge \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_{\omega'}^* e^{i[-g_{\omega'}(r) + \omega' t]} d\omega' \right\}. \quad (10.37)$$

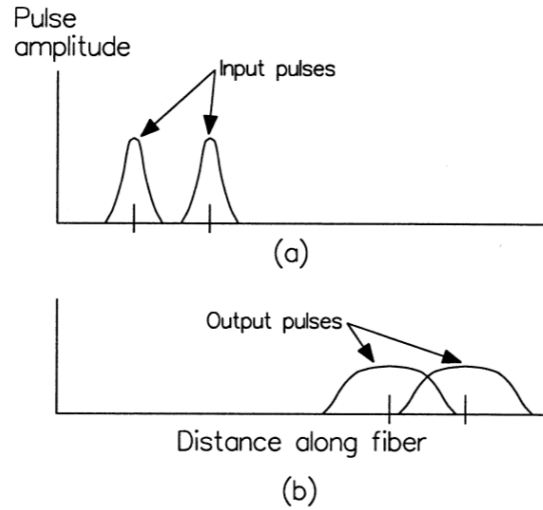


Figura 10.11: Efecto del ensanchamiento de pulsos en la frecuencia máxima de datos. a) pulsos bien resueltos antes de la propagación por el material. b) solapamiento de pulsos a la salida.

Juntando términos similares, la integral se puede simplificar (o complicar) de la siguiente forma

$$\langle \mathbf{S} \rangle (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \int \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_\omega \wedge \mathbf{B}_{\omega'}^*) e^{i[g_\omega(r) - g_{\omega'}(r)]} e^{-i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' \right\}. \quad (10.38)$$

Esta integral es fuertemente fluctuante excepto cuando $\omega = \omega'$. Cuando ω es distinto de ω' el promedio temporal es 0 por lo que solamente nos quedan los términos con $\omega = \omega'$. Por consiguiente, la intensidad es la suma de las intensidades para cada frecuencia temporal y la integral doble se simplifica a una sencilla ¹

$$\langle \mathbf{S}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_\omega \wedge \mathbf{B}_\omega^*) d\omega \right\}. \quad (10.39)$$

Esto significa que el promedio temporal de vector de Poynting de una onda no armónica se obtiene como suma de los vectores de Poynting para cada una de las frecuencias que tiene la onda

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{S}_\omega \rangle d\omega. \quad (10.40)$$

vector de Poynting
para ondas
policromáticas

Este resultado es de gran importancia, pues queda validado el uso de ondas monocromáticas para el cálculo del vector de Poynting. Cuando tenemos luz policromática, la energía que transporta es igual a la suma que transporta cada una de las frecuencias individuales.

¹ si quisiéramos detectar fluctuaciones temporales, como en el caso del efecto Doppler, sección 10.2.1, no podemos simplificar la integral

Parte III

INTERFERENCIAS

INTERFERENCIAS: FUNDAMENTOS

Se estudiará el fenómeno de las interferencias, así como las condiciones que deben cumplirse para que tengan lugar. Las interferencias deberían ser un fenómeno muy común: las ecuaciones de Maxwell son lineales en los campos mientras que el promedio temporal del vector de Poynting, la magnitud observable y medible, es una función cuadrática de ellos. Sin embargo, su observación, en la práctica, requiere unas condiciones restrictivas que nos llevarán a la conclusión de que la mejor forma de producir interferencias es generar fuentes virtuales a partir de una única fuente luminosa coherente.

Índice

11.1	Interferencias de las ondas electromagnéticas	160
11.2	Interferencias entre dos ondas armónicas planas	163
11.2.1	Condiciones para la interferencia	163

OBJETIVOS

- Conocer las condiciones con las cuales se producen las interferencias.

REFERENCIAS GENERALES:

- Born M., Wolf E., "Principles of Optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light", Cambridge University Press (1999).
- Hariharan P. "Optical interferometry", Academic Press (2003).
- Hariharan P. "Basics of interferometry", Academic Press (2010).
- Malacara, Z., Servín, M. "Interferogram analysis for optical testing", CRC press (2010).



Figura 11.1: Casos en los cuales el efecto interferencial es observable de forma sencilla. (a) Colores en las pompas de jabón. (b) Colores en aceite sobre agua. (c) Colores en las alas de la mariposa.

INTERFERENCIAS DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las interferencias están relacionadas con el fenómeno ondulatorio. Existen numerosos ejemplos en la Física donde aparecen interferencias (no confundir con el ruido) como pueden ser las ondulaciones de una cuerda, las vibraciones de sonido o las ondas en el mar. En Óptica, los fenómenos interferenciales, aunque presentes en la naturaleza, no son observables de forma tan sencilla. Por ejemplo, si tenemos dos lámparas en el techo cuyas intensidades son I_1 e I_2 respectivamente, la intensidad total resulta ser la suma de las intensidades, $I = I_1 + I_2$. Existen, no obstante, situaciones conocidas las cuales se puede interpretar como un fenómeno interferencial, como pueden ser los colores que aparecen las pompas de jabón o en las alas de mariposa, cuando se echa una capa fina de aceite sobre agua¹, Figura 11.1.

En la Figura 11.2 se muestra la esencia del fenómeno interferencial. Tenemos dos ondas esféricas escalares, ubicadas en distintas posiciones $\mathbf{r}_1 = (-d/2, 0, 0)$ y $\mathbf{r}_2 = (d/2, 0, 0)$. Estos campos están representados por

$$u_1 = \frac{A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}, \quad u_2 = \frac{A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}. \quad (11.1)$$

Cada una de las fuentes genera un campo, a una distancia z representado en las Figuras 11.2a y b. Si sumamos las intensidades, $I = |u_1|^2 + |u_2|^2$, de cada una de las ondas obtenemos la Figura 11.2c. Sin embargo, si sumamos las amplitudes de los campos y luego calculamos la intensidad como el valor absoluto al cuadrado, (11.5), $I = |u_1 + u_2|^2$ aparecen una serie de franjas perpendiculares a la dirección de las fuentes.

Las condiciones para que se produzca la interferencia óptica son relativamente restrictivas. En parte, es debido a que estamos tratando con ondas vectoriales transversales. Las ecuaciones de Maxwell son lineales en los campos eléctricos y magnéticos. Si tenemos dos campos electromagnéticos $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ y $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ que son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, entonces los campos suma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ también es una solución de las ecuaciones de Maxwell, ya que éstas son lineales en los campos. Sin embargo, el campo no es un fenómeno observable, sino la irradiancia. Hemos visto en el Capítulo 3 que el promedio temporal del vector de Poynting para ondas armónicas resulta (2.7)

$$\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \}. \quad (11.2)$$

También hemos relacionado el vector de Poynting con la irradiancia (2.9)

$$Irradiancia \equiv \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n}. \quad (11.3)$$

Para el caso de una onda armónica plana, el promedio temporal del vector de Poynting (2.8),

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k. \quad (11.4)$$

Entonces definimos la intensidad como (11.7)

$$Intensidad \equiv |\mathbf{E}_0|^2, \quad (11.5)$$

que es proporcional a la irradiancia. Estas ecuaciones no son equivalentes pues (11.4) solo es válida cuando la suma de las dos ondas continúa siendo una onda armónica plana. No obstante, normalmente utilizaremos (11.5) por ser más sencilla

¹ info sobre interferencia en capas finas http://en.wikipedia.org/wiki/Thin-film_interference

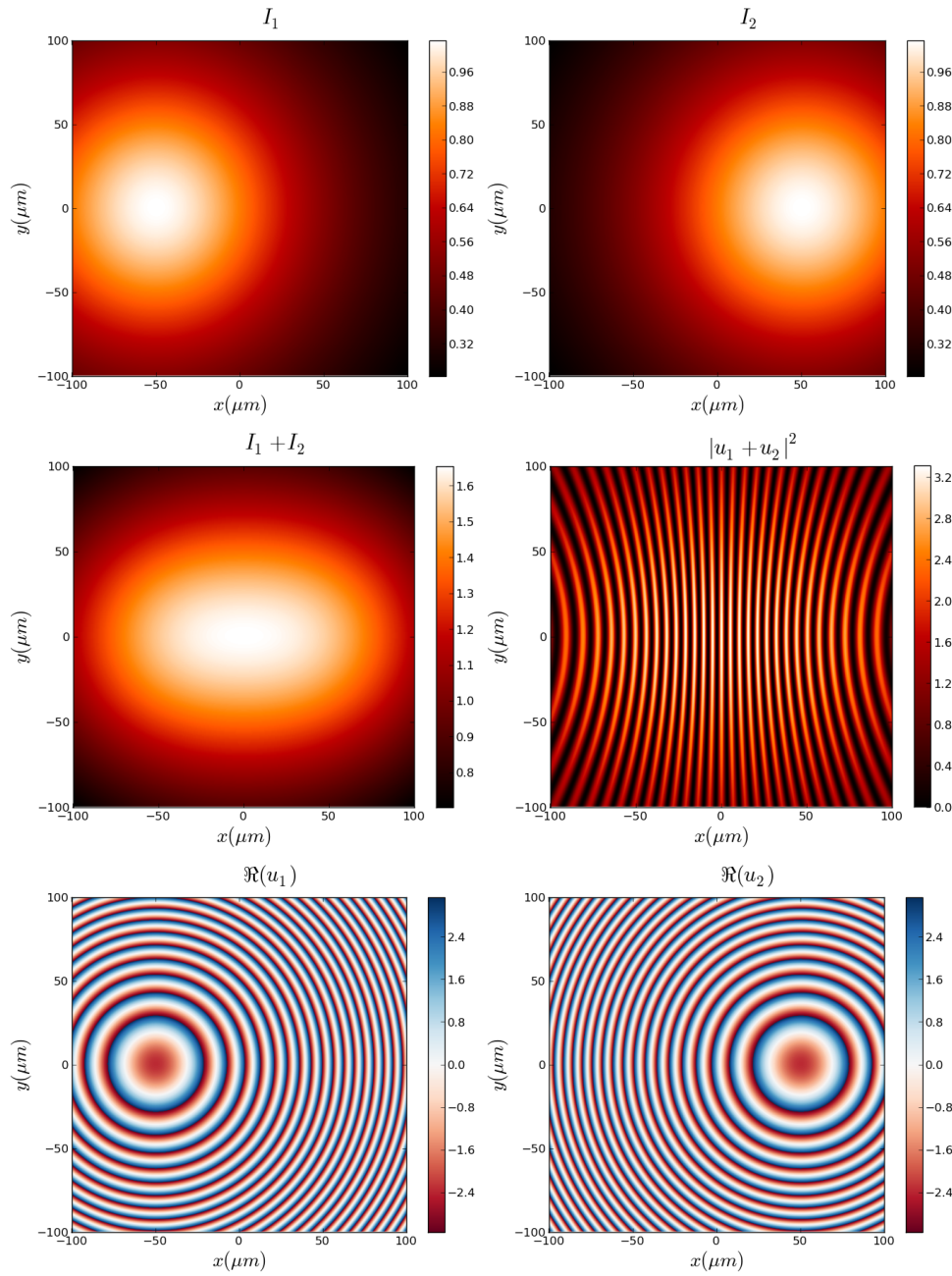


Figura 11.2: Línea superior. Intensidad generada por cada una de las fuentes, $|u_1|^2$ y $|u_2|^2$. Línea central. Suma de las intensidades generada por cada una de las fuentes $|u_1|^2 + |u_2|^2$, donde no hay término interferencial e intensidad total generada por el término total $|u_1 + u_2|^2$. Línea inferior. Parte real del campo producido por dos ondas esféricas ligeramente separadas entre sí $\Re\{u_1\}$ y $\Re\{u_2\}$.

y es válida cuando los ángulos involucrados en las ondas no son excesivamente grandes.²

Aunque el fenómeno de las interferencias se puede obtener con fuentes de luz clásicas, e incluso con luz policromática, en el laboratorio las interferencias se suelen obtener de una forma sencilla mediante el uso de fuentes monocromáticas y coherentes³, como líneas espectrales o un láser⁴.

En un primer lugar, Sección 11.2, analizaremos las condiciones por las que una fuente luminosa puede producir interferencias. La aparición de las interferencias está relacionado con las propiedades de la fuente luminosa. Se requiere que los dos haces sea coherentes, tengan la misma longitud de onda, los estados de polarización no deben ser ortogonales y, para maximizar las interferencias, la amplitud de las ondas debe ser similar. Para que dos fuentes tengan las mismas propiedades, la mejor forma es que provengan de una única fuente de luz, en forma de fuentes virtuales. Existen diversas formas para generar fuentes virtuales. El primer método, denominado división del frente de onda, Sección 12.1, consiste en dividir el haz incidente en dos partes, cada una de las cuales se trata como un haz independiente. Esto sucede, por ejemplo, haciendo pasar el haz original por dos aperturas separadas una cierta distancia o por un biprisma que modifica de forma distinta la trayectoria de cada una de las partes del haz. Otra forma de generar fuentes virtuales es dividir el haz mediante superficies parcialmente reflectantes de forma que parte de la luz se refleja y parte se transmite, Sección 17.1. También, mediante reflexiones múltiples se pueden generar muchas fuentes virtuales, Sección ??, que todas interfieren entre sí. Esto produce un reforzamiento de las interferencias.

APLICACIONES DE LAS INTERFERENCIAS Las interferencias son de gran importancia tecnológica pues es uno de los métodos más sensibles para gran detectar cantidad de magnitudes físicas⁵. Tiene el inconveniente de que se requiere una cierta estabilidad mecánica y control ambiental para evitar variaciones de la temperatura, etc. pero muchas veces es la única técnica con la resolución requerida. Algunas de las aplicaciones más relevantes son:

- Medida de distancias
- Determinación de la calidad superficial
- Medida de espesores
- Medida del índice de refracción
- Recubrimientos antirreflectantes
- Holografía
- Espectroscopía
- Medidas estelares: tamaños de estrellas lejanas

Algunas de estas aplicaciones se analizan en detalle en la asignatura “Láseres y Metrología Óptica” del Máster en Nuevas Tecnologías Electrónicas y Fotónicas.

² un análisis riguroso entre las diferencias se encuentra en la Sección 12.4.

³ veremos con detalle el concepto de coherencia en el Capítulo 16

⁴ <http://en.wikipedia.org/wiki/Laser>

⁵ <http://en.wikipedia.org/wiki/Interferometry>

INTERFERENCIAS ENTRE DOS ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Como hemos visto, el efecto de las interferencias surgen directamente del hecho que las ecuaciones de Maxwell son lineales en los campos eléctrico y magnético. Supongamos que \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 son soluciones, entonces $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ también es una solución. Como parámetro observable calcularemos la intensidad (11.5), al ser más sencillo. Un análisis más riguroso requiere del cálculo del promedio temporal del vector de Poynting, que se realiza en el Complemento 12.4. Los resultados son muy similares cuando los ángulos entre los haces son pequeños. Para la intensidad obtenida por la suma dos ondas tenemos

$$I = \langle |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 \rangle, \quad (11.6)$$

donde $\langle \bullet \rangle$ representa un promedio temporal. Desarrollando el cuadrado resulta

$$\begin{aligned} I &= \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^* \rangle = \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^* \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^* \rangle + \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1^* \rangle \quad (11.7) \\ &= \langle |\mathbf{E}_1|^2 \rangle + \langle |\mathbf{E}_2|^2 \rangle + 2 \langle \text{Re} (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*) \rangle. \end{aligned}$$

Si no existiera el tercer término, entonces la intensidad total sería la suma de las intensidades, $I = I_1 + I_2$, que es lo que normalmente observamos en la naturaleza. Es por ello que el fenómeno interferencial ocurre cuando $2 \langle \text{Re} (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*) \rangle \neq 0$. Para analizar este término, supongamos dos ondas armónicas planas con distinta amplitud, frecuencia, dirección de propagación y fase, $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0,1} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1)}$ y $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0,2} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2)}$. Considerando (11.7) la intensidad resulta

$$\begin{aligned} I &= |\mathbf{E}_{0,1}|^2 \langle \cos^2(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1) \rangle + |\mathbf{E}_{0,2}|^2 \langle \cos^2(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2) \rangle \quad (11.8) \\ &+ 2 \text{Re} (\mathbf{E}_{0,1} \mathbf{E}_{0,2}^*) \langle \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1) \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2) \rangle. \end{aligned}$$

El promedio temporal de la función \cos^2 es igual a $1/2$, por lo que se puede escribir como

$$I = \frac{|\mathbf{E}_{0,1}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{E}_{0,2}|^2}{2} + 2 \text{Re} (\mathbf{E}_{0,1} \mathbf{E}_{0,2}^*) \langle \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t + \phi_1) \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t + \phi_2) \rangle. \quad (11.9)$$

Condiciones para la interferencia

El último término de (11.9) se puede desarrollar expandiendo la multiplicación de cosenos, $\cos a \cos b = 2 \cos(a+b) \cos(a-b)$,

$$\begin{aligned} 2 \langle \text{Re} (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*) \rangle &= \text{Re} (\mathbf{E}_{0,1} \mathbf{E}_{0,2}^*) \langle \cos[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \mathbf{r} + (\phi_2 - \phi_1) - (\omega_2 - \omega_1)t] \rangle \\ &+ \text{Re} (\mathbf{E}_{0,1} \mathbf{E}_{0,2}^*) \langle \cos[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{r} + (\phi_2 + \phi_1) - (\omega_2 + \omega_1)t] \rangle. \end{aligned}$$

El segundo término, tiene una frecuencia temporal $\omega_1 + \omega_2$ muy alta, por lo que el promedio temporal será nulo. Por consiguiente,

$$2 \langle \text{Re} (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*) \rangle \approx \text{Re} (\mathbf{E}_{0,1} \mathbf{E}_{0,2}^*) \langle \cos[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \mathbf{r} + (\phi_2 - \phi_1) - (\omega_2 - \omega_1)t] \rangle. \quad (11.10)$$

Para que se produzca el fenómeno interferencial este término no puede ser nulo, lo que ocurre cuando se cumplen simultáneamente la siguientes condiciones:

MONOCROMATICIDAD Cuando existe una cierta dependencia temporal el promedio se hace nulo. El caso óptimo para producir interferencias es $\omega_1 = \omega_2$. No obstante, cuando la diferencia de frecuencias es muy pequeña, $\Delta\omega < 1 \text{ GHz}$,

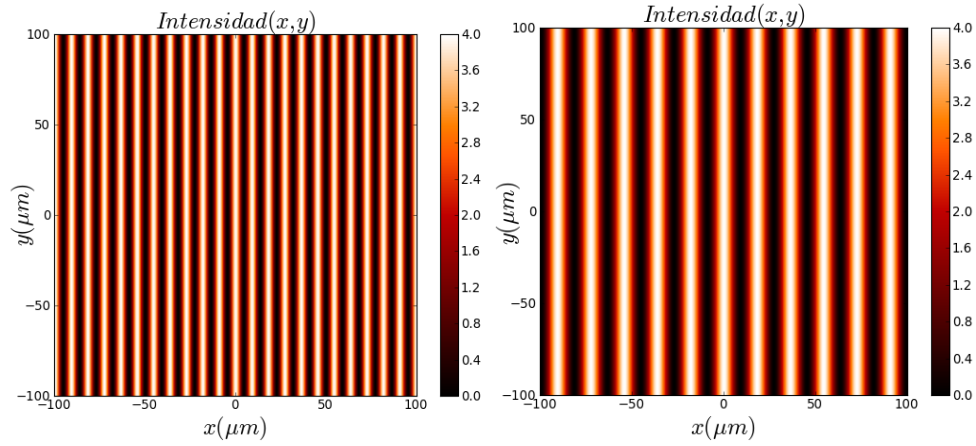


Figura 11.3: Interferencias entre dos ondas planas donde cambia el ángulo entre los vectores \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 . Cuanto mayor es el ángulo, las franjas tienen un menor periodo.

se pueden observar las interferencias con un batido temporal, como en el efecto Doppler⁶.

NO-ORTOGONALIDAD Veamos ahora el término de amplitudes $\mathbf{E}_{0,1} \cdot \mathbf{E}_{0,2}^*$. Para observar la interferencia en las mejores condiciones ambas ondas deben tener el mismo estado de polarización. Supongamos que estamos en polarización lineal, $\mathbf{E}_{0,1} = E_{0,1}\mathbf{u}_{E,1}$ y $\mathbf{E}_{0,2} = E_{0,2}\mathbf{u}_{E,2}$. La amplitud resulta $\mathbf{E}_{0,1} \cdot \mathbf{E}_{0,2}^* = E_{0,1}E_{0,2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, siendo φ_1 y φ_2 las direcciones de polarización de ambas ondas. Esto significa que para que exista el término interferencial los campos eléctricos, al menos, no deben ser perpendiculares entre sí. La máxima interferencia ocurre cuando los vectores de polarización son paralelos.

COHERENCIA El término $\phi_2 - \phi_1$ representa la diferencia entre los desfases iniciales de las ondas. Este término debe mantenerse constante. Sin embargo, la fase suele depender fuertemente de la coherencia temporal de la fuente que genera la onda, $\phi_2(t) - \phi_1(t)$, pues la luz esta producida por fenómenos atómicos con un cierto tiempo característico. Para que este término no dependa del tiempo, es necesario que las fuentes luminosas sean lo más coherentes posibles, como los haces láser de fuentes estabilizadas. El tiempo de coherencia δt debe ser mayor que el tiempo en el que la luz pasa en la zonas de interferencias, $\tau \ll \delta t$. Este aspecto lo veremos en el Capítulo 16 “COHERENCIA”.

AMPLITUD El fenómeno de las interferencias se ve favorecido si las ondas tienen aproximadamente la misma amplitud.

La condición de máxima interferencia, fuentes monocromáticas con el mismo estado de polarización y coherentes, la distribución de intensidad coincide con el modelo escalar de interferencias, Figura 11.3.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}]. \quad (11.11)$$

Aparecen máximos de intensidad en aquellas posiciones donde $\delta = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} = 2n\pi$ y mínimos de interferencias donde $\delta = (2n + 1)\pi$, es decir, los máximos aparecen cuando $\cos \delta = 1$ y mínimos cuando $\cos \delta = -1$, Figura 11.3.

⁶ No es siempre necesario utilizar una única fuente: se pueden realizar interferencias con dos láseres distintos siempre que $\Delta\omega$ sea suficientemente pequeño para entre en las frecuencias detectables. Por otro lado, en la interferometría heterodina se utiliza un imán para obtener dos frecuencias ligeramente distintas por efecto Zeeman.

Un parámetro para medir la calidad de las interferencias es la visibilidad, V ,

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (11.12)$$

que vale $V = 1$ cuando $I_{min} = 0$ y vale $V = 0$ cuando no hay modulación, es decir cuando $I_{min} = I_{max}$. En el caso de dos ondas armónicas planas (11.11) tenemos que la máxima intensidad es $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ y la intensidad mínima $I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ y como consecuencia la visibilidad resulta

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (11.13)$$

Si ambas ondas tienen la misma intensidad $I_2 = I_1$, entonces

$$I = I_1 \cos^2(\delta/2), \quad (11.14)$$

por lo que la intensidad mínima se hace nula. Entonces, la visibilidad es $V = 1$ y estamos en condiciones de máxima interferencia.

Como conclusión respecto a las condiciones de interferencias anteriormente descritas (monocromaticidad, coherencia, polarización y amplitud) resulta que la mejor forma de obtener interferencias es cuando las dos (o más) fuentes son la misma. Esto significa que se debe dividir la onda en varias. Hay varias posibilidades como las división del frente de ondas, Figura 11.4, utilizando un trozo de la onda original para hacerlas interferir. En esta disposición los interferómetros más típicos son el interferómetro con biprisma de Fresnel y el interferómetro de la doble rendija de Young. También se puede dividir la amplitud mediante el fenómeno de reflexión-refracción obteniendo con un divisor de haz, preferentemente, dos haces con igual amplitud ($T = R = 0,5$). Los interferómetros más representativos son la lámina plano-paralela y el interferómetro de Michelson. Finalmente se pueden conseguir interferencias con múltiples reflexiones utilizando dos superficies parcialmente reflectantes y haciendo que los haces se reflejen varias veces sobre ellos. El interferómetro típico que utiliza esta técnica es el de Fabry-Perot.

CONCLUSIONES

- Parece que las interferencias debieran ser un fenómeno común en la naturaleza, pero no es fácilmente observable. Se deben cumplir una serie de restricciones, como la monocromaticidad, polarización no transversal y coherencia entre las ondas, que no se obtienen fácilmente.
- Para hacer óptimos estos parámetros es necesario que la luz de los dos haces provenga de la misma fuente. Existen varios métodos obtener fuentes dos fuentes virtuales a partir de una, como la división del frente de ondas y la división de la amplitud.
- La distribución de intensidad en la figura interferencial se puede calcular midiendo el camino óptico entre las fuentes virtuales y el punto de observación.

ECUACIONES PRINCIPALES

- $I = \langle |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 \rangle = \langle |\mathbf{E}_1|^2 \rangle + \langle |\mathbf{E}_2|^2 \rangle + 2 \langle \text{Re}(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*) \rangle$
- $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}]$

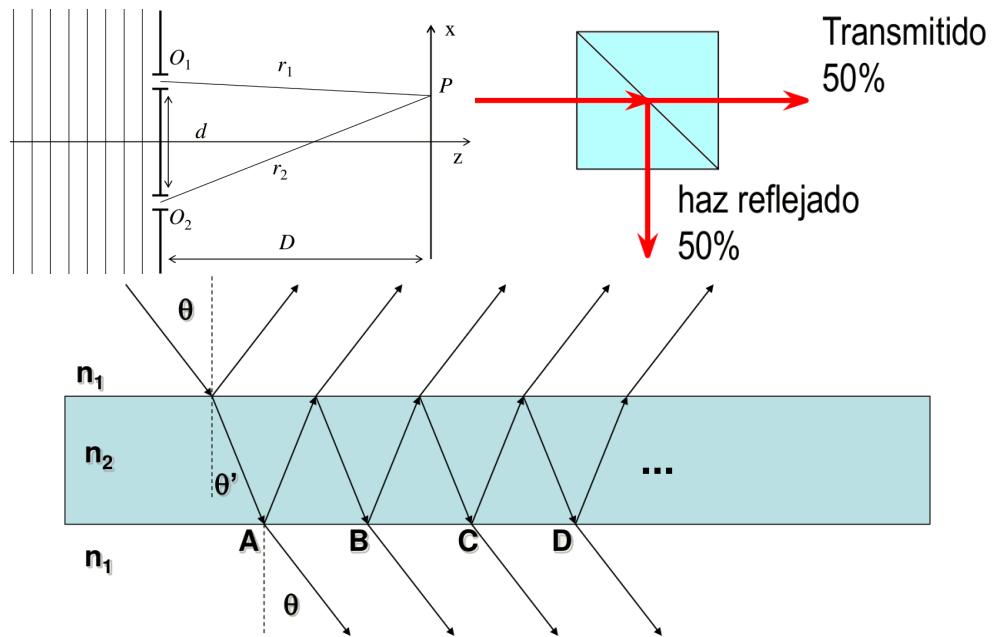


Figura 11.4: Distintas formas de obtener las interferencias (a) División del frente de ondas. (b) División de la amplitud. (c) Interferencias múltiples.

$$\blacksquare V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

INTERFERENCIAS POR DIVISIÓN DEL FRENTE DE ONDAS

Se estudiarán una forma de generar dos fuentes virtuales mediante la división del frente de ondas. Se analizarán con detalle algunos dispositivos clave relacionados con este fenómeno como son el biprisma de Fresnel¹ y la doble rendija de Young.

Índice

12.1	Introducción	167
12.2	Biprisma de Fresnel	167
12.3	Experimento de la doble rendija de Young	171
12.4	Cálculo riguroso de las interferencias en el biprisma de Fresnel	172
12.5	Otros tipos de interferómetros de división del frente de ondas	174
12.5.1	Espejo de Fresnel	174
12.5.2	Espejo de Lloyd	174

OBJETIVOS

- Comprender las interferencias por división del frente de ondas, así como los distintos interferómetros basados en ellas: el biprisma de Fresnel, el experimento de la doble rendija de Young, para ondas planas y fuentes puntuales.
- Conocer algunas aplicaciones tecnológicas en las cuales se utilizan los interferómetros.

INTRODUCCIÓN

En las interferencias por división del frente de ondas, se obtienen dos haces a partir de tomar dos trozos de una misma onda y reconducirlos para que haya una zona del espacio donde coincidan. Esto se puede hacer de varias formas utilizando prismas (interferómetro con biprisma de Fresnel), espejos (interferómetros con espejo de Fresnel y con espejo de Lloyd). El famoso experimento de la doble rendija de Young² también entra en este tipo de interferómetros, donde se utilizan dos pequeños agujeros y las ondas resultantes de cada agujero, por difracción, se aproximan a ondas esféricas. Por motivos docentes, lo analizaremos en los capítulos de difracción y de coherencia (15 y 16).

BIPRISMA DE FRESNEL

Una forma eficiente de tener dos fuentes virtuales provenientes de la misma fuente, con un cierto ángulo entre ellas, es el biprisma de Fresnel, que se muestra en la Figura 12.1. El biprisma de Fresnel consta de dos prismas de un ángulo β muy pequeño.

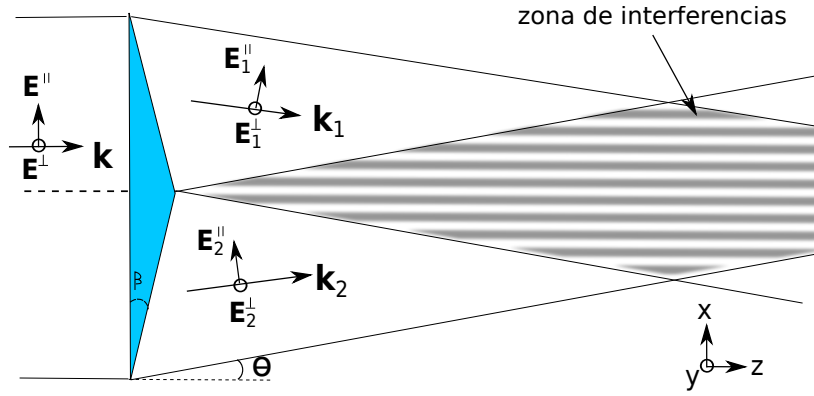


Figura 12.1: Esquema del biprisma de Fresnel con un haz plano incidente y proceso de obtención de franjas.

Biprisma con onda armónica plana

Supongamos que sobre el biprisma incide una onda armónica plana, en incidencia normal. Esta onda tiene un cierto estado de polarización E_0 . Parte de la luz es refractada por el prisma superior y parte de la luz es refractada por el biprisma inferior. Los ángulos θ y $-\theta$ con los cuales se refractan los haces se puede calcular a partir de la ley de Snell, $\theta \approx (n-1)\beta$. Normalmente el ángulo θ es muy pequeño. Debido al tamaño finito del biprisma, las ondas dejan de ser completamente planas, pero obviaremos este aspecto, que no afecta a nuestros cálculos. En la parte superior tenemos una onda “cuasi”plana cuyo vector de ondas resulta (8.1)

$$\mathbf{k}_1 = k(-\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad (12.1)$$

mientras que en la parte inferior tenemos otra onda “cuasi”plana cuyo vector de ondas resulta

$$\mathbf{k}_2 = k(\sin \theta, 0, \cos \theta). \quad (12.2)$$

Supongamos que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia. Entonces los dos campos eléctricos son paralelos entre sí. Si, además, asumimos que las amplitudes de los dos campos son iguales, $E_1 = E_2 = E_0$, la suma de los dos campos eléctricos resulta

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)} + E_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (12.3)$$

Por consiguiente, utilizando las definiciones de \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , (12.1) y (12.2), el campo total resulta

$$\mathbf{E} = 2E_0 e^{i(k \cos \theta z - \omega t)} \cos(k \sin \theta x), \quad (12.4)$$

y la intensidad

$$I = 4|E_0|^2 \cos^2(k \sin \theta x). \quad (12.5)$$

Otra característica importante es que el máximo de intensidad es $I_{max} = 4I_0$, 4 veces superior a la distribución de una onda armónica plana. No obstante, si realizamos el promedio espacial de la intensidad

$$\int I(x) dx = 4I_0 \int \cos^2(k \sin \theta x) dx = 2I_0, \quad (12.6)$$

¹ información sobre interferómetros: <http://en.wikipedia.org/wiki/Interferometer>

² [http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_\(scientist\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_(scientist))

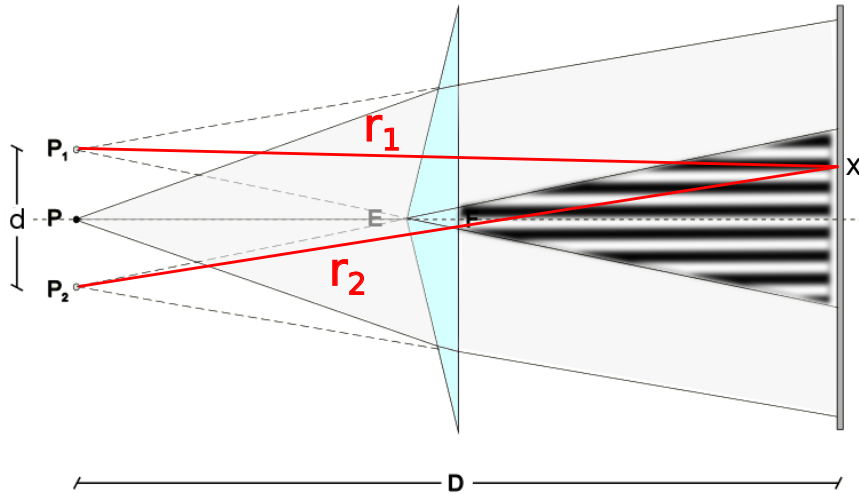


Figura 12.2: Biprisma de Fresnel con fuente puntual. Representación de las fuentes virtuales.

pues estamos sumando dos ondas cuya intensidad es I_0

Veamos algunas consecuencias de este resultado.

- En primer lugar, aparece una distribución espacial de intensidad con fluctuaciones en el eje x , es decir, aparecen franjas paralelas al eje de propagación.
- El periodo de las franjas resulta $p = \lambda / \sin \theta$. Controlando el ángulo de inclinación se puede controlar el periodo de las franjas.
- Puesto que las dos ondas tienen la misma amplitud, el proceso interferencial es óptimo, siendo la visibilidad $V = 1$.
- Aunque se produce una re-distribución espacial de la energía, el promedio se corresponde con la suma de las intensidades de las 2 ondas, $\int I(x)dx = 2|E_0|^2$.
- La fase se propaga en la dirección del eje z , es decir, en la bisectriz de ambos vectores de onda.

Biprisma con fuente puntual

Supongamos que en lugar de una onda armónica plana, tenemos una fuente puntual que emite una onda esférica, Figura 12.2. Para simplificar los cálculos, consideraremos que el estado de polarización es perpendicular al plano. Cada prisma genera una fuente virtual P_1 y P_2 . En la zona F ambos haces solapan y se produce el fenómeno de las interferencias. Para calcular la posición de las franjas de interferencia, simplemente tenemos que determinar la posición de las fuentes virtuales y calcular los caminos ópticos hasta llegar al plano de observación, para cada una de las fuentes. La distancia entre las fuentes virtuales d depende exclusivamente de las características del biprisma (ángulo e índice de refracción). Consideremos que el plano de las fuentes virtuales es $z = 0$. Entonces las fuentes están ubicadas en $P_1 = (-d/2, 0, 0)$ y $P_2 = (d/2, 0, 0)$. El punto de observación será Entonces un punto sobre dicha pantalla, que es donde calcularemos el campo resulta ser $O = (x, 0, D)$. Las distancias respectivas entre las fuentes virtuales y el punto de

observación son $r_1 = \sqrt{(x - d/2)^2 + D^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x + d/2)^2 + D^2}$ respectivamente. Los campos de cada una de las fuentes resulta entonces

$$\mathbf{E}(x, 0, D) = \frac{\mathbf{A}}{r_1} e^{ikr_1} + \frac{\mathbf{A}}{r_2} e^{ikr_2}. \quad (12.7)$$

Sobre la pantalla el campo total será la suma de los procedentes de cada orificio, y la intensidad su cuadrado

$$I = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2, \quad (12.8)$$

de donde

$$\begin{aligned} I &= \frac{|\mathbf{A}|^2}{r_1^2} + \frac{|\mathbf{A}|^2}{r_2^2} + 2 \frac{|\mathbf{A}|^2}{r_1 r_2} \cos[k(r_2 - r_1)] \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k(r_2 - r_1)], \end{aligned} \quad (12.9)$$

con $I_i = |\mathbf{A}|^2 / r_i^2$, $i = 1, 2$. Hay una variación espacial de intensidad sobre la pantalla de observación, pues la intensidad sólo depende de su distancia a cada una de las fuentes puntuales. Esta distribución de franjas se ha analizado en la Figura 11.2. La diferencia de fases $k(r_2 - r_1)$ se corresponde con la diferencia de caminos ópticos recorridos por los haces. Para estudiar la figura interferencial es conveniente realizar algunas aproximaciones:

1. Las fuentes tienen que estar próximas entre sí en comparación con la distancia de observación, y la zona de observación de observación debe estar próxima al eje óptico

$$d \ll D,$$

$$x, y \ll D.$$

2. Las distancias r_1 y r_2 aparecen en dos sitios con un papel muy diferente: en las intensidades I_1 y I_2 la dependencia es muy suave, mientras que en la fase la dependencia es acusada, por ser k muy grande para la luz visible.

a) Para la amplitud, consideraremos que $r_1 \approx r_2 \approx D$, lo que implica que $I_1 \approx I_2 \approx I_0$.

b) Como en la fase la diferencia de camino óptico está multiplicada por el número de ondas que es muy grande, $\cos(2\pi r / \lambda)$, es necesario realizar una aproximación más refinada, y nos quedaremos con un desarrollo lineal de las raíces cuadradas

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$$

$$r_1 = D \sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{D^2}} \approx D + \frac{x^2 + d^2/4 - xd}{2D}; \quad (12.10)$$

análogamente para r_2 ,

$$r_2 = D \sqrt{1 + \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2}{D^2}} \approx D + \frac{x^2 + d^2/4 + xd}{2D}.$$

Utilizando estas dos aproximaciones, la diferencia de fase resulta $r_2 - r_1 = xd/D$. Si el medio circundante es el vacío, $n = 1$, la distribución de intensidad en el plano z resulta

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{D} \right) \right] = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{xd}{D} \right), \quad (12.11)$$

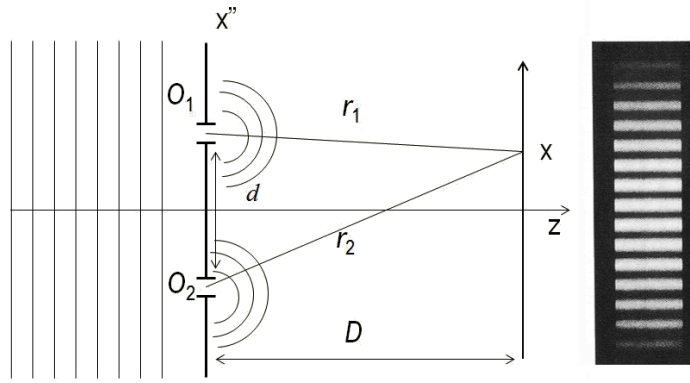


Figura 12.3: Coordenadas de los puntos de emisión y el punto de observación para el experimento de la doble rendija de Young.

Los máximos de interferencia aparecen en

$$\frac{\pi x d}{\lambda D} = m\pi,$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Al valor de m se le llama *orden del máximo interferencial* correspondiente. La coordenada del máximo de orden m es

$$x_{max} = m \frac{\lambda D}{d}. \quad (12.12)$$

La posición de los máximos depende de la longitud de onda, por lo que sabiendo las dimensiones del dispositivo se pueden medir longitudes de onda de modo preciso. Recíprocamente, la interferencia puede servir para medir la separación entre dos fuentes puntuales si se conoce la longitud de onda con que emiten. En cuanto a los mínimos de intensidad ocurren en posiciones

$$\frac{2\pi x b}{\lambda D} = (2m + 1) \pi,$$

con $m \in \mathbb{Z}$ e $I_{min} = 0$.

EXPERIMENTO DE LA DOBLE RENDIJA DE YOUNG

El experimento del biprisma de Fresnel es de gran sencillez conceptual y utilidad experimental al aprovechar toda la onda incidente para producir interferencias. No obstante, se pueden obtener interferencias con un montaje experimental más sencillo, simplemente con una máscara a la que se han realizado dos pequeñas aberturas separadas una cierta distancia d . Aunque la onda incidente sea plana, por efectos difractivos que estudiaremos en el Capítulo 15, el agujero genera una ondas esférica³. En la Figura 12.3 se muestra el esquema del experimento de la doble rendija de Young⁴. Como se observa, el experimento a partir de las dos aberturas es formalmente idéntico al biprisma de Fresnel con fuente puntual, donde d es la distancia entre las dos fuentes virtuales, mientras que aquí d es la distancia entre las dos aberturas. El resultado de este experimento es el mismo, (12.11).

³ Un ejemplo riguroso basado en FDTD se muestra en <http://www.youtube.com/watch?v=FeCV27-mk0I>

⁴ info sobre Young: http://es.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young

CÁLCULO RIGUROSO DE LAS INTERFERENCIAS EN EL BIPRISMA DE FRESNEL

La ecuación (12.3) se ha utilizado para calcular la intensidad producida por el biprisma de Fresnel. Sin embargo, al estar formado dicho campo por dos ondas armónicas en distinta dirección, no es una onda armónica plana. Por consiguiente de forma rigurosa no es posible utilizar la intensidad, sino que debemos calcular el promedio temporal del vector de Poynting.

Supongamos que el campo eléctrico incidente tiene un acimut α , e forma que se puede escribir como $\mathbf{E} = \cos \alpha \mathbf{E}_{\parallel} + \sin \alpha \mathbf{E}_{\perp}$. Este acimut se mantiene después de la reflexión. Las amplitudes de las ondas refractadas resulta perpendicular a los vectores de ondas \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , respectivamente (8.32)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,\perp} &= E_{1,\perp}(0, 1, 0)', \\ \mathbf{E}_{1,\parallel} &= E_{1,\parallel}(\cos \theta, 0, \sin \theta)', \\ \mathbf{E}_{2,\perp} &= E_{2,\perp}(0, 1, 0)', \\ \mathbf{E}_{2,\parallel} &= E_{2,\parallel}(\cos \theta, 0, -\sin \theta)', \end{aligned} \quad (12.13)$$

donde, como hemos visto, θ depende de las propiedades del biprisma (ángulo e índice de refracción). Estudiemos por separado las componentes perpendicular y paralela.

CAMPO PERPENDICULAR En este caso, el campo eléctrico de las 2 ondas es paralelo entre sí. Si, además, asumimos que las amplitudes de los dos campos son iguales entonces $\mathbf{E}_{1,\perp} = \mathbf{E}_{2,\perp} = \mathbf{E}_{0,\perp}$

$$\mathbf{E}_{\perp} = E_{0,\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)} + E_{0,\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (12.14)$$

Por consiguiente, utilizando las definiciones de \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , 12.1 y 12.2, el campo total perpendicular resulta

$$\mathbf{E}_{\perp} = 2E_{0,\perp} e^{ik \cos \theta z} \cos(k \sin \theta x) \hat{\mathbf{y}}. \quad (12.15)$$

Necesitamos ahora calcular el campo magnético, que se puede obtener, para cada una de las componentes como⁵ (1.38) $\mathbf{E}_0 = -(c^2/\omega) \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0$. Como consecuencia el campo magnético resulta para cada una de las ondas

$$\mathbf{B}_{1,\perp} = -\frac{E_{0,\perp}}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)} \quad (12.16)$$

$$\mathbf{B}_{2,\perp} = -\frac{E_{0,\perp}}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (12.17)$$

⁵ Aquí si podemos hacerlo para cada onda por separado

de forma que el campo magnético total resulta

$$\mathbf{B}_{\perp} = 2 \frac{E_{0,\perp}}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos(k \sin \theta x) \\ 0 \\ i \sin \theta \sin(k \sin \theta x) \end{pmatrix} e^{ik \cos \theta z} \cos(k \sin \theta x). \quad (12.18)$$

CAMPO PARALELO Como se observa en la Figura 12.1, las componentes $\mathbf{E}_{1,\parallel}$ y $\mathbf{E}_{2,\parallel}$ del campo eléctrico de cada una de las ondas no son paralelas entre sí. Asumiremos también que las amplitudes de las dos ondas son iguales (en valor absoluto), $E_{2,\parallel} = E_{1,\parallel} = E_{0,\parallel}$. La suma de los dos campos eléctricos resulta

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}_{1,\parallel} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_{2,\parallel} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)} \quad (12.19)$$

$$= E_{0,\parallel} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)} + E_{0,\parallel} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)} \quad (12.20)$$

Por consiguiente, utilizando las definiciones de \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 , 12.1 y 12.2, el campo total paralelo resulta

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 2E_{0,\parallel} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(k \sin \theta x) \\ 0 \\ -i \sin \theta \sin(k \sin \theta x) \end{pmatrix} e^{ik \cos \theta z} \cos(k \sin \theta x), \quad (12.21)$$

De igual forma que para el caso del campo eléctrico perpendicular, podemos obtener, una a una las componentes del campo magnético, que resultan ser paralelas entre sí, en dirección de \mathbf{u}_y ,

$$\mathbf{B}_{\parallel} = 2 \frac{E_{0,\parallel}}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik \cos \theta z} \cos(k \sin \theta x). \quad (12.22)$$

PROMEDIO TEMPORAL DEL VECTOR DE POYNTING Por consiguiente los campos eléctricos y magnéticos resultan ser

$$\mathbf{E} = 2 \begin{pmatrix} E_{0,\parallel} \cos \theta \cos(k \sin \theta x) \\ E_{0,\perp} \\ -E_{0,\parallel} i \sin \theta \sin(k \sin \theta x) \end{pmatrix} e^{ik \cos \theta z} \cos(k \sin \theta x), \quad (12.23)$$

y

$$\mathbf{B} = \frac{2}{c} \begin{pmatrix} -E_{0,\perp} \cos \theta \cos(k \sin \theta x) \\ E_{0,\parallel} \\ iE_{0,\perp} \sin \theta \sin(k \sin \theta x) \end{pmatrix} e^{ik \cos \theta z} \cos(k \sin \theta x). \quad (12.24)$$

Como el promedio temporal del vector de Poynting para una onda armónica (no plana) resulta $\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \}$, se obtiene

$$\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(|E_{0,\perp}|^2 + |E_{0,\parallel}|^2 \right) \cos \theta \cos^2(k \sin \theta x) \mathbf{u}_z. \quad (12.25)$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \cos \theta \cos^2(k \sin \theta x) \mathbf{u}_z. \quad (12.26)$$

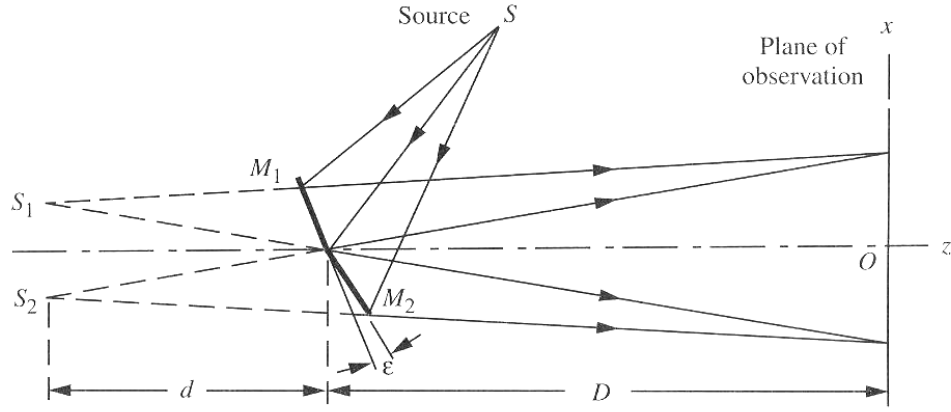


Figura 12.4: Espejo de Fresnel.

De esta forma, podemos ver que, para ángulos pequeños,

$$\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}_z \approx 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(k \sin \theta x) \quad (12.27)$$

$$\propto I(\mathbf{r}, t) = 4 |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(k \sin \theta x). \quad (12.28)$$

Esto nos permite, a partir de ahora, utilizar la intensidad en lugar de la irradiancia, para los cálculos en interferencias.

OTROS TIPOS DE INTERFERÓMETROS DE DIVISIÓN DEL FRENTE DE ONDAS

La doble rendija de Young y el biprisma de Fresnel son dos de los interferómetros por división del frente de ondas más significativos. Sin embargo hay otros varios que han sido utilizados por su interés o facilidad de fabricación.

Espejo de Fresnel

Otra forma de conseguir la división del frente de ondas es mediante el uso de dos espejos, Figura 12.4. La idea es la misma que con el biprisma que es crear dos fuentes virtuales, donde esta vez son las fuentes simétricas respecto a los espejos. Si el ángulo entre espejos, ϵ , es muy pequeño las dos fuentes virtuales estarán muy juntas. Mediante un sencillo modelo geométrico, es posible determinar la posición de las fuentes virtuales. El haz, al reflejarse en los dos espejos, seguirá trayectorias diferentes y en la zona de solapamiento se producirán interferencias.

Espejo de Lloyd

Un esquema todavía más sencillo es el espejo de Lloyd, Figura 12.5, donde una de las fuentes virtuales se sustituye por la fuente real. Este esquema es muy sencillo porque con una única fuente, preferentemente bastante coherente, y un único espejo somos capaces de conseguir interferencias. Según el esquema, para que las dos fuentes estén próximas entre sí, la fuente real, s_0 debe estar bastante cerca del espejo y el haz debe incidir de forma rasante. En este esquema hay que considerar que en la reflexión, que produce la fuente virtual, se produce un desfase, que es aproximadamente π , según las ecuaciones de Fresnel para un metal, por lo que las posiciones de los máximos estarán cambiadas.

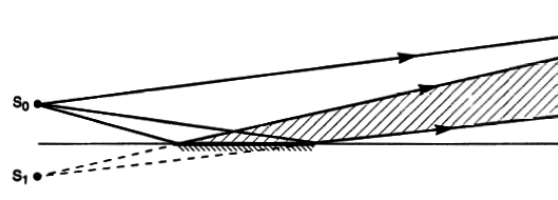


Figura 12.5: Espejo de Lloyd.

CONCLUSIONES

- Una técnica muy sencilla de obtener dos fuentes virtuales a partir de una única fuente luminosa es el interferómetro basado en el biprisma de Fresnel.
- Conceptual e históricamente el interferómetro de la doble rendija de Young es de gran importancia. Su estudio es equivalente al del biprisma de Fresnel. Desde el punto de vista energético, el biprisma de Fresnel es mucho más eficiente.
- Para el estudio de las interferencias normalmente se estudia la intensidad. Para el caso de ángulos pequeños es equivalente al concepto más rigurosos de promedio temporal del vector de Poynting.

Parte IV

DIFRACCIÓN

Vimos en el primer tema que podíamos resolver de forma exacta las ecuaciones de Maxwell para el caso de ondas armónicas planas. Sin embargo, no es nada sencillo saber como se propagan otro tipo de ondas. Un modo de estudio es a partir de la descomposición del campo inicial en ondas planas. La ventaja que tiene este enfoque es que el conocimiento de la propagación de ondas armónicas planas es conocido y exacto. Una vez propagadas dichas ondas planas, éstas se vuelven a sumar para obtener el campo total.

Índice

13.1	Introducción	179
13.2	Aproximación de elemento delgado	182
13.2.1	Elementos opacos	185
13.2.2	Elementos dieléctricos	186
13.2.3	Elementos reflectores	186
13.2.4	La lente como elemento difractivo	186
13.3	Propagación de la luz después de la máscara	187
13.4	Descomposición en ondas planas	190
13.4.1	Campo propagado	192
13.4.2	El problema de la polarización	193

OBJETIVOS

- Comprender el fenómeno de la difracción como un proceso de propagación de ondas no planas.
- Saber describir las máscaras a partir de su transmitancia mediante la aproximación de elemento delgado.

REFERENCIAS GENERALES:

- Born M., Wolf, E., "Principles of Optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light", Cambridge university press (1999).
- Goodman J.W., "Introduction to Fourier optics", McGraw-Hill (1996).
- Steward E.G., "Fourier optics: An Introduction", Dover (2004).
- Reynolds G.O. et al. "The new physical optics notebook: tutorials in Fourier optics", SPIE Optical Engineering Press(1989).

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los fenómenos que se observan en la vida diaria indican que la luz se propaga en línea recta cuando el medio es homogéneo. Esta es la suposición principal que se realiza en la Óptica Geométrica. El modelo geométrico ha sido muy satisfactorio para estudiar el proceso de formación de la imagen tanto en el

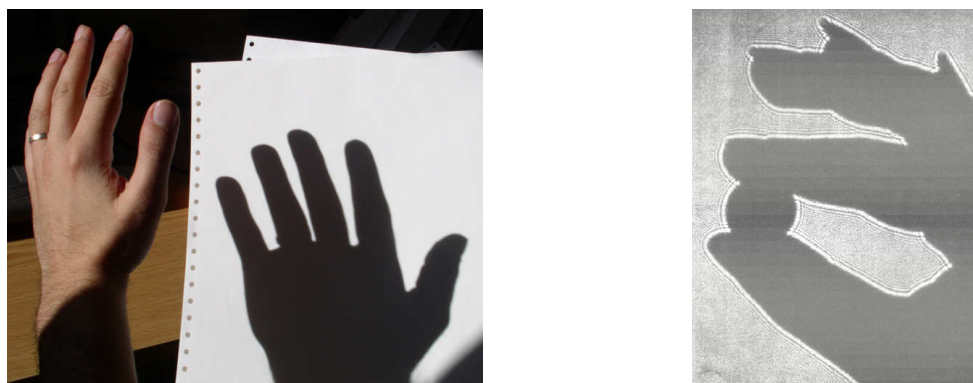


Figura 13.1: En el modelo geométrico, la luz se propaga en línea recta y la sombra de la mano es en línea recta. Si se utiliza luz monocromática coherente (láser) aparecen fluctuaciones onduladas que no se pueden explicar desde un modelo geométrico.

sistema visual humano como para el desarrollo de distintos instrumentos ópticos. No obstante, a partir del siglo XVII aparecen una serie de fenómenos que no concordaban con esta suposición. El primero en observar el fenómeno de la difracción fue Grimaldi¹, en 1665.

Según la Óptica Geométrica, la sombra es la proyección de un objeto sobre una cierta superficie, Figura 13.1a. No obstante, si se realiza dicho experimento con una fuente monocromática y coherente, como un láser, entonces aparecen en la zona donde debiera estar la transición sombra-luz, una distribución una serie de franjas alternantes de luz y oscuridad, Figura 13.1b. La aparición de máximos y mínimos de intensidad en la zona de los bordes da idea de que la luz se comporta de una forma ondulatoria. Desde el punto de vista de la Óptica Geométrica, podemos definir la difracción a la violación de la propagación rectilínea de la luz en medios homogéneos, no causada por la reflexión o refracción. Existen diversos ejemplos ópticos cotidianos que se relacionan con el fenómeno de la difracción², Figura 13.2.

No obstante, en esta asignatura no hemos tratado la Óptica Geométrica excepto en algunos casos puntuales para comparar con el modelo electromagnético. En este sentido, definimos la difracción como un fenómeno doble. Por un lado, la luz cuando incide sobre un elemento difractor, cambia de forma abrupta su amplitud y fase. Es necesario desarrollar un modelo para determinar el campo de salida del elemento difractor en función del campo de entrada. Un modelo riguroso requiere la resolución de las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (1.1-1.4), lo cual solamente se puede realizar en la práctica de forma numérica con técnicas numéricas como Beam Propagation Method (BPM³), Finite Difference Time Domain (FDTD⁴), Figura 13.3, o Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA⁵), este último para estructuras periódicas.

Aquí desarrollaremos un modelo analítico simple y lineal, la Aproximación de Elemento Delgado (TEA, Thin Element Approximation). Si asumimos que la onda incidente es una onda armónica plana, que es lo que realmente sabemos resolver, el campo de salida del elemento difractor deja de ser una onda plana. En este sentido, la difracción se puede considerar, desde el punto de vista de la óptica elec-

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Francesco_Maria_Grimaldi

² Fenómenos ópticos cotidianos: <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/gioq/fenopt/index.htm>

³ http://en.wikipedia.org/wiki/Beam_Propagation_Method

⁴ http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_time_domain

⁵ http://en.wikipedia.org/wiki/Rigorous_coupled-wave_analysis

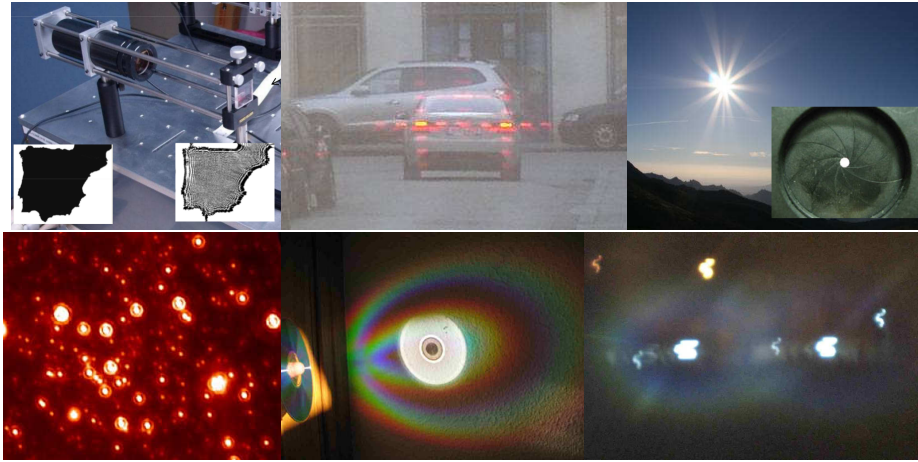


Figura 13.2: Ejemplos que no se pueden explicar desde el punto de vista geométrico y que son fácilmente observables. (a) Cuando se ilumina con un láser, la sombra de un objeto no es limpia, sino aparecen fluctuaciones. (b) Luces espurias cuando una luz se observa a través de un visillo. (c) Cuando se observa una fuente de luz a través de un pequeño iris, aparece una forma estrellada con un número de halos igual al número de bordes del iris. (d) Círculos de luz alrededor de las estrellas cuando se observan con un telescopio. (e) Colores que aparecen al iluminar un CD. (f) Halo de luz cuando hay vaho sobre un espejo.

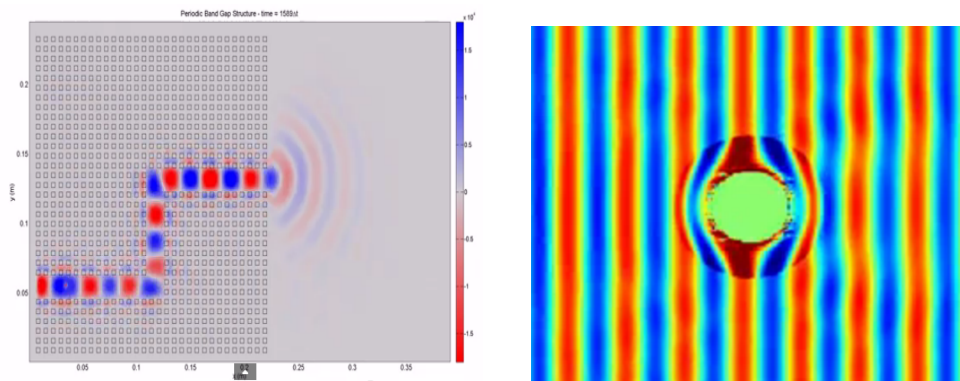


Figura 13.3: Ejemplos de propagación de luz por estructuras inhomogéneas, calculados mediante FDTD. a) Propagación en un cristal fotónico (dieléctrico donde las esferas son huecas) y b) una simulación de invisibilidad basada en metamateriales (cloaking). Hay dos vídeos en <http://www.youtube.com/watch?v=gZkFVco4kL4> y <http://www.youtube.com/watch?v=8M0I7RZO4Hw>.

tromagnética, como la propagación de ondas armónicas no planas sobre un medio homogéneo. Así, en la Sección 13.2 estudiaremos la Aproximación de Elemento Delgado y en la Sección 13.4 analizaremos la descomposición de ondas planas⁶.

En casi todos los modelos, las ecuaciones involucradas son bastante complicadas de resolver para casos particulares, por lo que adoptaremos dos aproximaciones que nos van a facilitar el cálculo analítico. Por un lado, tenemos la aproximación de Fresnel, Sección 14.1, donde realizaremos una aproximación cuadrática de los términos de la fase. Este caso es particularmente útil pues para las longitudes de onda del rango visible y los tamaños de los elementos difractores en el rango de las decenas de micras - milímetros, esta aproximación es válida para la mayoría de los casos de interés. Además, algunas veces las integrales con exponenciales cuadráticas se pueden resolver. Veremos ejemplos numéricos particulares como la difracción por una rendija, un cuadrado, un círculo y una lente.

Sin embargo, el caso de difracción más desarrollado en la bibliografía es la aproximación de Fraunhofer⁷, que se analiza en la Sección 15.1, donde se realiza una aproximación lineal al término de fase. Esta aproximación es más burda que la de Fresnel y es válida para distancias mayores al elemento difractor. También se puede aplicar cuando estamos en el plano focal de una lente. El éxito de la aproximación de Fraunhofer radica en que el campo difractado se puede calcular de una forma sencilla como la transformada de Fourier del campo de entrada. Veremos ejemplos simples como la difracción por un cuadrado, una rendija, una abertura circular, la doble rendija, etc. De particular importancia tiene esta aproximación por el hecho de permitir explicar el poder de resolución de los instrumentos ópticos. Aun en ausencia de aberraciones, no es posible formar una imagen perfecta, sino que aparece un halo alrededor que impide observar correctamente los objetos a través de un instrumento óptico. Además de para capturar una mayor cantidad de luz, esta resolución es el motivo por el cual los telescopios son cada vez de mayor diámetro, pues tienen un mejor poder resolutivo.

APROXIMACIÓN DE ELEMENTO DELGADO

Todo problema de propagación de la luz pasa, como hemos visto, por resolver las ecuaciones de Maxwell. Hasta ahora hemos resuelto problemas aislados, como la propagación en el vacío, en medios materiales homogéneos y la reflexión y refracción sobre superficies planas. En todos estos problemas hemos utilizado como onda incidente, la onda armónica plana, puesto que, por una parte, nos ha permitido una resolución “sencilla” y exacta y, por otra, los fenómenos estudiados son más o menos independientes del tipo de onda incidente.

Ahora se propone un problema más complejo, como es la interacción de la luz con un medio cuya topografía es variable, que denominaremos elemento difractor o máscara, que es una zona en el espacio, normalmente con una dimensión longitudinal, z , mucho menor que la transversal, x, y , donde el medio es inhomogéneo. Esto significa que tenemos una variación espacial de la constante dieléctrica

⁶ Existen otros numerosos enfoques a la difracción, algunos adaptados a problemas específicos, como aquellos en los que a priori se sabe que el tamaño del elemento difractor es mucho mayor que la longitud de onda (problemas de altas frecuencias utilizados en Electromagnetismo, como por ejemplo la Teoría Geométrica de la Difracción), métodos donde consideran que cuando llega la luz al elemento difractor se generan corrientes en la materia que vuelven a reemitir y generan el campo difractado (aproximación de la Óptica Física) o métodos donde consideran la fuente luminosa dentro del problema (Funciones de Green diádicas). También existen enfoques simplificados donde se considera la difracción de un campo escalar (Función de Green escalar). Este último ha sido uno de los métodos más explicados en docencia. Aquí hemos elegido el método de “Descomposición por ondas planas” pues se adapta mejor al discurso de la asignatura.

⁷ info sobre Fraunhofer: http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_von_Fraunhofer
<http://www.plicht.de/chris/35fraunh.htm>

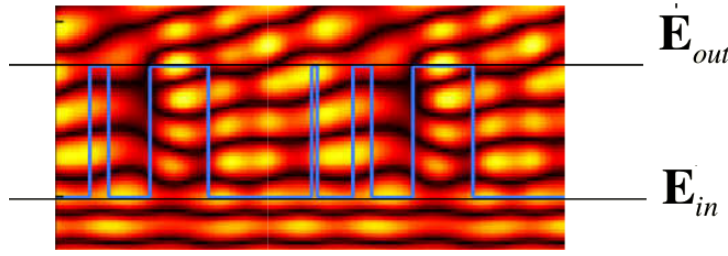


Figura 13.4: El problema de la propagación a través de un elemento difractor es muy complicada y se debe realizar mediante cálculos numéricos. Normalmente nos interesa conocer el campo de salida $E_{out}(x, y)$ en función del campo de entrada $E_{in}(\xi, \eta)$. Aquí mostramos una simulación desarrollada con FDTD en la que una onda armónica plana atraviesa una estructura binaria (línea azul).

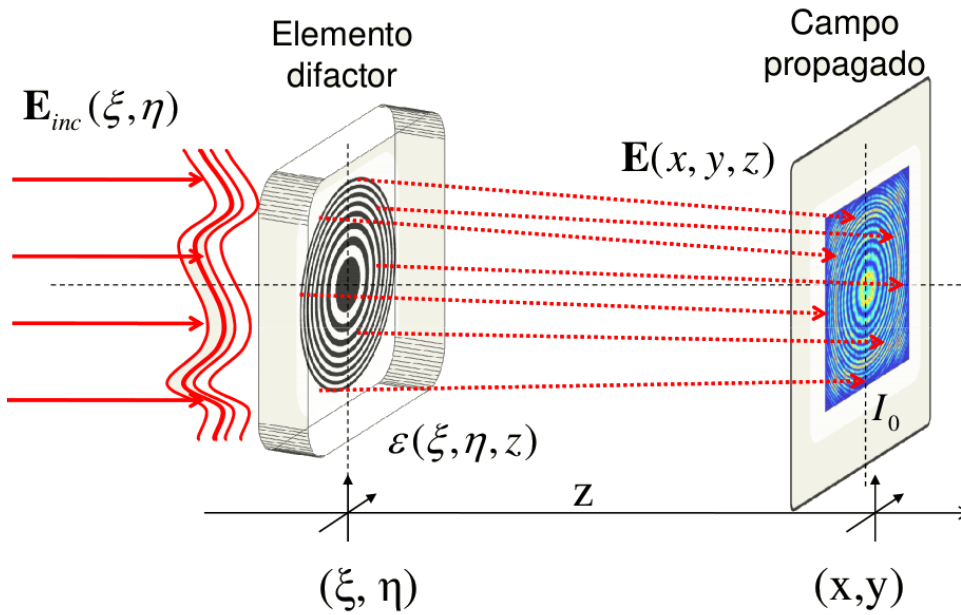


Figura 13.5: Ejemplo del problema de la difracción donde se muestran las coordenadas.

$\epsilon(x, y, z)$. Supongamos que un campo inicial $E(z = 0) = E_{in}(\xi, \eta)$ incide sobre el elemento difractor, situado en $z = 0$, donde su espesor h es pequeño en comparación con su longitud transversal. Mediante la aplicación de las ecuaciones de Maxwell, el campo a la salida del elemento difractor es $E_{out}(x, y; h)$. Como resumen a este problema, de gran complejidad, podemos asumir que el campo de salida es una función del campo de entrada, Figura 13.4,

$$E_{out}(x, y; h) = f[E_{in}(\xi, \eta)]. \quad (13.1)$$

Como nomenclatura utilizaremos las coordenadas (ξ, η) para el campo de entrada y las coordenadas (x, y) para el plano de observación, Figura 13.5. Supondremos que el elemento difractor, o máscara, puede modular la amplitud del campo de entrada, como por ejemplo un diafragma, o la fase, como un escalón sobre un pedazo de vidrio.

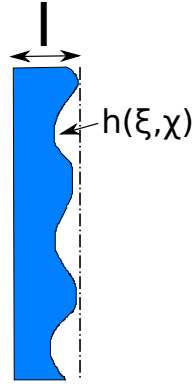


Figura 13.6: Ejemplo de elemento difractivo con espesor $h(\xi, \eta)$ variable. La fase se mide entre dos planos cuya distancia es l .

La aproximación de elemento delgado asume que existe una relación lineal entre el campo de salida y el campo de entrada de la forma

$$\mathbf{E}_o(\xi, \eta) = t(\xi, \eta) \mathbf{E}_i(\xi, \eta), \quad (13.2)$$

donde $t(\xi, \eta)$ se denomina coeficiente de transmisión del elemento difractor. Puesto que \mathbf{E}_o y \mathbf{E}_i son vectores de 3 dimensiones, t es una matriz 3×3 de forma que

$$\begin{pmatrix} E_{out,x} \\ E_{out,y} \\ E_{out,z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{in,x} \\ E_{in,y} \\ E_{in,z} \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Asumiremos que los ángulos involucrados son pequeños y que los cambios en el estado de polarización no son significativos. Entonces, esta matriz se convierte en un escalar y adopta la forma

$$t(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{i\phi(\xi, \eta)}, \quad (13.4)$$

donde $A(\xi, \eta)$ es la modulación en la amplitud del elemento difractivo y $\phi(\xi, \eta)$ es la modulación en la fase. $A(\xi, \eta)$ se puede calcular como el coeficiente de transmisión (o reflexión) dado por las ecuaciones de Fresnel, o por la transmisión de un objeto absorbente.

Asimismo, el desfase $\phi(\xi, \eta)$ producido por el elemento delgado se puede aproximar como el camino óptico del haz en su propagación a través del elemento, entre los planos,

$$\phi(\xi, \eta) = k \int_0^l n(\xi, \eta, z) dz, \quad (13.5)$$

donde k el número de ondas de la luz incidente, n es el índice de refracción del elemento difractivo, como se muestra en la Figura 13.6.

Esta aproximación es válida cuando los rasgos del elemento difractivo son mucho mayores que la longitud de onda y cuando el espesor del elemento difractivo es despreciable. Cuando esto no ocurre, el comportamiento de la luz dentro de una máscara puede ser muy complicado. Mediante métodos numéricos se puede obtener este cálculo, como se muestra en la Figura 13.7.

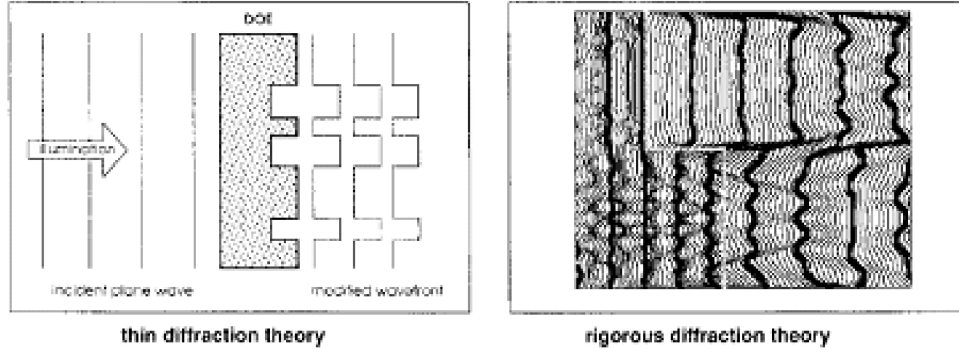


Figura 13.7: Ejemplo del desfase producido bajo la aproximación (13.2) y calculado mediante un método riguroso.

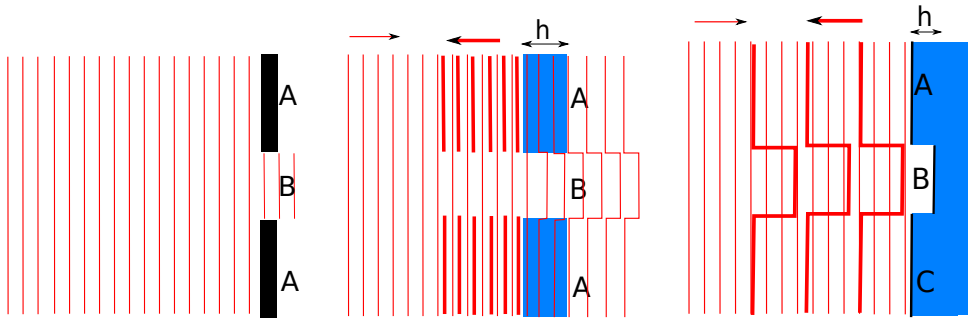


Figura 13.8: (a) Elemento difractor opaco. En la zona A, de transparencia, $t(\xi, \eta) = 1$, y en la zona B, opaca, $t(\xi, \eta) = 0$. (b) Elemento difractor dieléctrico. (c) Elemento difractivo reflector.

Como el camino óptico se debe medir entre dos planos, por ejemplo $z = 0$ y $z = l$. Entonces el camino óptico recorrido por la luz resulta

$$\phi|_0^l(\xi, \eta) = k \int_0^{h(\xi, \eta)} n(\xi, \eta, z) dz + k \int_{h(\xi, \eta)}^l n_0 dz, \quad (13.6)$$

donde n_0 es el índice de refracción en que rodea al elemento difractivo y $h(\xi, \eta)$ es el espesor del elemento difractivo. Cuando el índice de refracción dentro del material es constante, entonces $n(\xi, \eta, z) = n$

$$\phi|_0^l(\xi, \eta) = kL + k(n - n_0)h(\xi, \eta). \quad (13.7)$$

donde el primer término se suele despreciar pues es una fase global que normalmente no afecta a los fenómenos difractivos⁸. De esta forma el coeficiente de transmisión resulta

$$t(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{ik(n - n_0)h(\xi, \eta)}. \quad (13.8)$$

Elementos opacos

Supongamos que el elemento difractivo es opaco, Figura 13.8a. El haz que incide sobre el éste elemento difractivo es $E_{inc}(\xi, \eta)$. Podemos dividir el elemento opaco

⁸ Existen mejores aproximaciones, que no consideraremos, donde se calcula el desfase, no con una integración en $z = 0$ sino en la dirección local del vector de ondas \mathbf{k} .

en dos partes, A , que es la parte transparente, donde la luz pasa sin problemas, y B donde la luz es absorbida o reflejada por la máscara. En cualquier caso, la luz no atraviesa esta parte B , por lo que el coeficiente de transmisión resulta

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{en } A \\ 1 & \text{en } B \end{cases} . \quad (13.9)$$

Es por ello, que la onda justo después del elemento transmisor resulta

$$\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{en } A \\ \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) & \text{en } B \end{cases} . \quad (13.10)$$

También cabe considerar el caso de la reflexión, Figura 13.8b, que mediante un razonamiento parecido resulta

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} r & \text{en } A \\ 0 & \text{en } B \end{cases} . \quad (13.11)$$

siendo r el coeficiente de Fresnel (depende de la polarización) por lo que la onda reflejada hacia atrás resulta

$$\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = \begin{cases} r\mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) & \text{en } A \\ 0 & \text{en } B \end{cases} . \quad (13.12)$$

Elementos dieléctricos

Supongamos que la máscara es de fase, donde tenemos un medio de índice de refracción n y espesor L (zona B), donde se realiza una abertura (zona A), como se muestra en la Figura 13.8b. El campo justo después del elemento difractivo resulta

$$\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta)e^{inkL} & \text{en } A \\ \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta)e^{ikL} & \text{en } B \end{cases} . \quad (13.13)$$

Elementos reflectores

La difracción también se puede producir en la reflexión por un elemento difractivo. En la Figura 13.8c se muestra que el haz incidente puede reflejarse sobre distintas superficies produciendo diversos desfases, ya sea sobre elementos metálicos como dieléctricos.

$$\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = \begin{cases} \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) |r_1| e^{i\phi_1} & \text{en } A \\ \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) |r_1| e^{i2kL} & \text{en } B \\ \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) |r_2| e^{i\phi_2} & \text{en } C \end{cases} , \quad (13.14)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los desfases producidos por la reflexión (ecuaciones de Fresnel) y $2kL$ es el desfase debido a una mayor distancia de propagación (ida y vuelta).

La lente como elemento difractivo

Una lente se puede tratar como un elemento difractivo de amplitud y fase. Su comportamiento difractivo será analizado con posterioridad. Ahora nos es sufi-

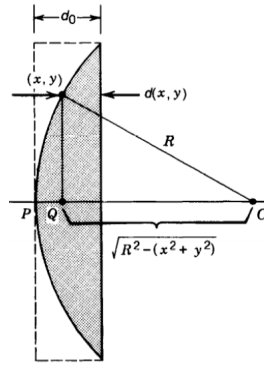


Figura 13.9: Lente como elemento difractivo.

cientemente calcular su transmitancia $t(\xi, \eta)$. Si la lente está alineada con el eje óptico, la transmitancia tendrá simetría radial.

Lo primero que debemos hacer es calcular el camino óptico para cada punto (ξ, η) , lo cual lo realizaremos a partir del espesor de la lente. Según (13.7) y la Figura 13.9 la transmitancia resulta

$$t(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) \exp \{ ik [d_0 + (n - 1)d(\xi, \eta)] \}, \quad (13.15)$$

donde $P(\xi, \eta)$ es el diafragma que produce la lente, pues asumimos que la luz que no atraviesa la lente no pasa por el sistema. Si la lente tiene un radio R , la función pupila viene determinada por

$$P(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \xi^2 + \eta^2 < R^2, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases} \quad (13.16)$$

El término $d(\xi, \eta)$ se puede calcular como

$$d = d_0 - R + \sqrt{R^2 - (\xi^2 + \eta^2)} \approx d_0 - (\xi^2 + \eta^2) / 2R, \quad (13.17)$$

donde hemos hecho una aproximación cuadrática a la forma de la lente. Con todo ello, obtenemos que la transmitancia de la lente resulta [?, cap 5.1]

$$t(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) e^{-ik \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2f'}}, \quad (13.18)$$

*transmitancia de una
lente en
aproximación
paraxial*

siendo $f' = R / (n - 1)$ la focal de la lente, que coincide con la definición utilizada en la Óptica Geométrica.

PROPAGACIÓN DE LA LUZ DESPUÉS DE LA MASCARA

Cuando la luz pasa por la máscara, o elemento difractor, la onda deja de ser plana, según se ha visto en (13.2). Esto nos complica el análisis, pues únicamente conocemos la propagación de ondas armónicas planas, según hemos visto en el Capítulo 3. No obstante, mediante descomposición de Fourier, se puede ver que una onda electromagnética se puede simplificar como una suma de ondas armónicas planas. Un hecho muy importante es que las ondas armónicas planas del estilo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ constituyen una base de funciones: se puede construir cualquier onda armónica coherente mediante superposición de Fourier, Figura 13.11.

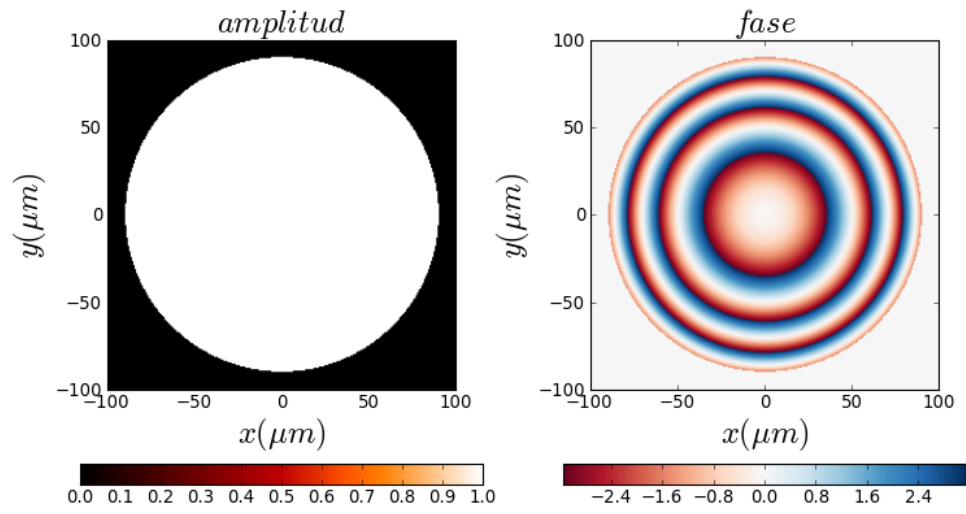


Figura 13.10: Transmitancia de una micro-lente de $90\ \mu m$ de radio y $2\ mm$ de focal. La parte de la fase está representada entre ángulos $-\pi$ y π .

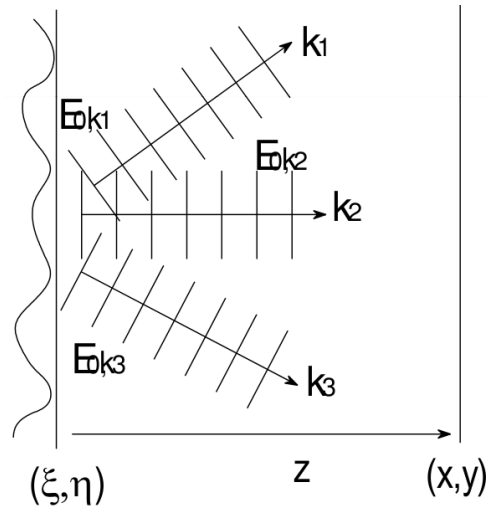


Figura 13.11: Descomposición del haz incidente en ondas planas.

Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, una superposición de ondas con distintas direcciones \mathbf{k} es también solución de las ecuaciones de Maxwell. Es por ello que, conceptualmente, la solución a una onda arbitraria, como la que sale después de un elemento difractor, es sencilla. El método es el siguiente:

1. Descomponer la onda general en ondas armónicas planas.
2. Propagar cada una de estas ondas armónicas planas, que sabemos hacerlo de forma exacta.
3. Volver a sumar todas las ondas propagadas en un punto (x, y, z) posterior, obteniendo así la propagación.

En este sentido, podemos ver la difracción como el fenómeno de propagación de la luz cuando ésta no es una onda plana. En 13.4 “Descomposición en ondas planas” se analiza con detalle este proceso de propagación de ondas no planas. En este complemento, se obtiene una ecuación que relaciona el campo en un plano de entrada, con el campo en un plano posterior, a una distancia z , (13.41)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\xi, \eta) * h(\xi, \eta; z), \quad (13.19)$$

donde $h(\xi, \eta; z)$ se denomina función de Green (13.40) y tiene la forma

$$h(\xi, \eta; z) \approx ik \cos \theta \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad (13.20)$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $\cos \theta = z/r$. Esta convolución se puede desarrollar como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = ike^{-i\omega t} \iint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) \cos \theta \frac{e^{ikR}}{R} d\xi d\eta, \quad (13.21)$$

donde $\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = t(\xi, \eta) \mathbf{E}_i(\xi, \eta)$, $\cos \theta = z/R$ y $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$.

Veamos un ejemplo sencillo que se puede resolver de forma sencilla. Este caso es el de un agujero infinitesimal. Entonces, el campo justo a la salida del elemento difractor resulta ser $\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = \mathbf{E}_0 \delta(\xi) \delta(\eta)$. La integral se puede resolver de forma sencilla,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = ike^{-i\omega t} \iint \mathbf{E}_0 \delta(\xi) \delta(\eta) \cos \theta \frac{e^{ikR}}{R} d\xi d\eta \quad (13.22)$$

$$= ik \mathbf{E}_0 \cos \theta \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} A, \quad (13.23)$$

donde A es el área, infinitesimalmente pequeña, de la abertura. Esto quiere decir, que una abertura infinitesimal difracta como una onda esférica (no hemos hablado de la polarización, que está claro que no puede mantenerse para cada dirección de la onda esférica).

Este resultado se puede comparar con la técnica numérica Finite Difference Time Domain (FDTD⁹), que se muestra en la Figura 13.12. Se muestra la propagación por una rendija para distintos tamaños de la rendija respecto a la longitud de onda. Cuando la abertura es muy pequeña comparada con la longitud de onda se obtiene una propagación en forma de onda esférica. A medida que el tamaño de la rendija aumenta la onda se direcciona cada vez más.

Veamos, cuales son las aproximaciones más importantes a la hora de estudiar la propagación de la luz después de una máscara. En la Figura 13.13 se muestran

⁹ info sobre FDTD http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_time_domain

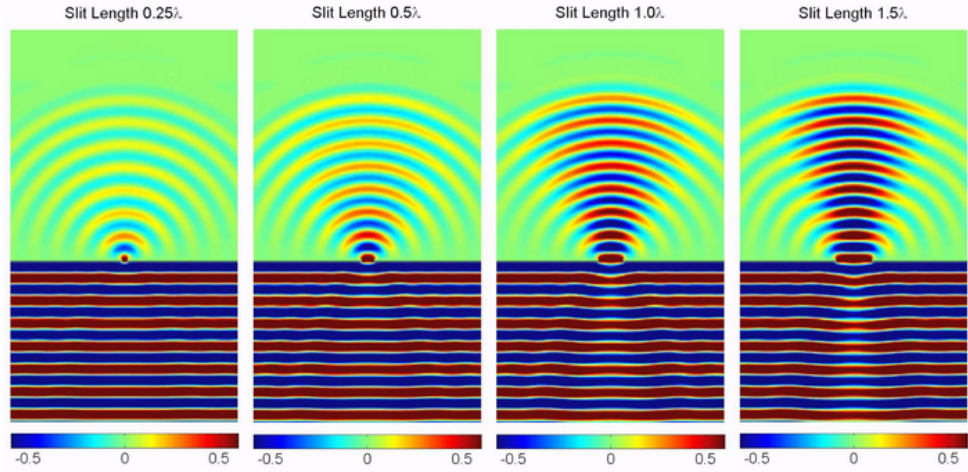


Figura 13.12: Ejemplo obtenido con FDTD de la difracción por un pequeño agujero. Se emite la luz de forma bastante aproximada como una onda esférica. Se muestra un vídeo en http://www.youtube.com/watch?v=uPQMI2q_vPQ

los rangos de aproximación para cada uno de los modelos desarrollados posteriormente. Si estamos muy cerca de la máscara, del orden de unas pocas longitudes de onda, es necesario considerar las ondas evanescentes, que son ondas cuyas frecuencias en la ecuación (13.36) cumplen $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ y entonces k_z debe ser un número complejo. Pasadas unas pocas longitudes de onda, estas ondas evanescentes son despreciables y entonces solamente es necesario considerar las ondas dentro del plano $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$. No obstante, sigue siendo necesario considerar las raíces cuadradas en las exponenciales. Estos dos casos no los consideraremos. Empezaremos en la aproximación de Fresnel, donde aproximamos las raíces cuadradas por cuadráticas, 14.1, y finalizaremos con la aproximación de Fraunhofer o de campo lejano, donde las exponenciales se pueden aproximar por la parte lineal

DESCOMPOSICIÓN EN ONDAS PLANAS

Veamos con más detalle, el desarrollo matemático. Sea el caso general de un campo eléctrico $E_0(x, y)$ generado por una onda armónica¹⁰, en un plano dado, que consideraremos sin pérdida de generalidad $z = 0$. Mediante el desarrollo de Fourier esta onda se puede separar en sus componentes angulares. Es decir, una onda arbitraria se puede describir como una combinación lineal de ondas planas con distintas direcciones, puesto que las ondas planas forman una base. Como un plano es bidimensional, con coordenadas x, y , el campo resulta

$$E_0(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \iint E_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (13.24)$$

donde el vector \mathbf{k} se ha descompuesto en sus términos $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})$.

También se puede encontrar de la forma $\mathbf{k} = k(s_x, s_y, s_z = \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2})$. Cada término de la integral $E_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)}$ es en realidad una onda armónica plana de amplitud constante. Si tenemos el campo inicial $E_0(x, y)$, las amplitudes de ca-

¹⁰ si la onda no fuera armónica habría que hacer una descomposición espectral como se analizó en el Cap. 10.

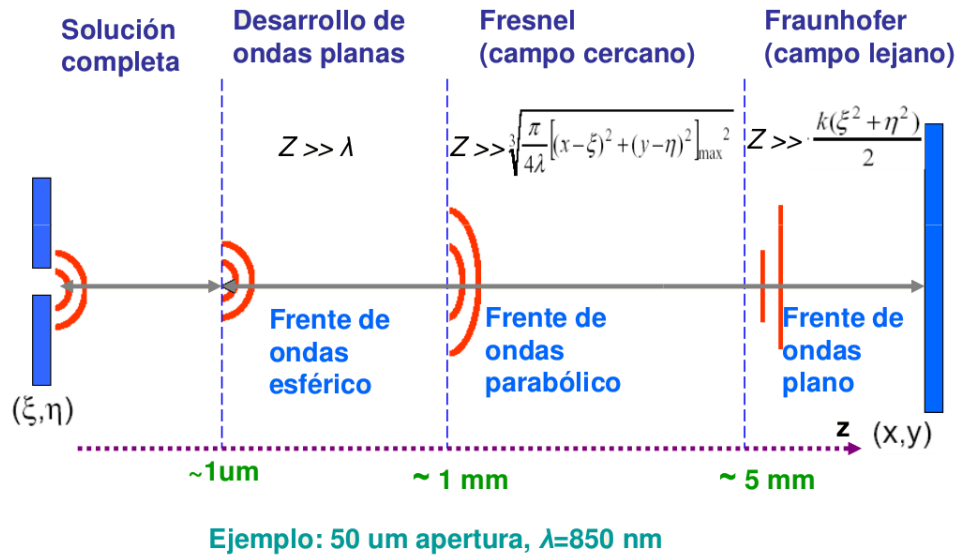


Figura 13.13: Rangos de validez de las distintas aproximaciones.

da una de las ondas armónicas se pueden obtener a través de la transformada de Fourier inversa

$$\mathbf{E}_0(k_x, k_y) = \iint \mathbf{E}_0(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (13.25)$$

Esta es la verdadera importancia de las ondas planas. Los campos se pueden descomponer, mediante transformadas de Fourier, en una combinación lineal de ondas planas.

EJEMPLO: ONDA ESFÉRICA Como ejemplo, podemos descomponer una onda esférica en ondas armónicas planas (teorema de Weyl). Esta descomposición tiene la siguiente forma matemática

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_z} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dk_x dk_y, \quad (13.26)$$

donde se cumple que $k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Como se observa el término de la izquierda representa una onda esférica de amplitud unidad centrada en el origen. Cada una de las componentes de la integral es una onda plana con dirección \mathbf{k} y cuya amplitud no es constante, sino que decrece según $1/k_z$. Por ello, la descomposición en el espectro frecuencias espaciales para este caso particular resulta

$$\mathbf{E}(k_x, k_y) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{k_z} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (13.27)$$

EJEMPLO: RENDIJA Otro caso de interés es el caso una onda armónica plana que incide perpendicularmente sobre una rendija de tamaño a , Figura 13.14. En este caso, el espectro en frecuencias espaciales se resuelve de una forma sencilla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(k_x, k_y) &= \iint_A \mathbf{E}_0(\xi, \eta) e^{-i(k_x \xi + k_y \eta)} d\xi d\eta \\ &= \mathbf{E}_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x \xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_y \eta} d\eta \\ &= \mathbf{E}_0 a \operatorname{sinc}(k_x a/2) \delta(k_y). \end{aligned} \quad (13.28)$$

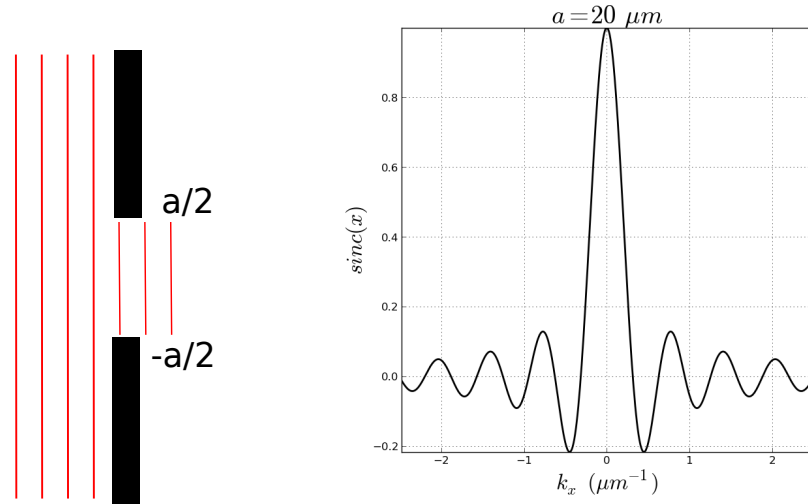


Figura 13.14: (a) Esquema de una rendija como elemento difractor. (b) Función $\text{sinc}(k_x a/2)$ cuando la longitud de onda es $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$.

Es decir, la onda a la salida de la rendija tiene una multiplicidad de ondas planas. En la dirección y existe únicamente la dirección $k_y = 0$ y en la dirección x la amplitud de las ondas planas es proporcional a una función sinc .

Campo propagado

Una vez que conocemos la amplitud de cada onda plana armónica, que viene dada por

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathbf{E}_0(k_x, k_y), \quad (13.29)$$

solamente nos queda propagarlas hasta una distancia z . Para cada una de estas ondas, su propagación en el espacio es muy sencilla, pues resulta ser

$$\mathbf{E}_{(k_x, k_y)}(x, y, z) = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (13.30)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathbf{E}_0(k_x, k_y) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (13.31)$$

donde, por definición $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ y por ello $k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$. Para el caso de tener muchas ondas planas, el campo se suma integrando cada una de las soluciones

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \iint \mathbf{E}_{(k_x, k_y)}(x, y, z) dk_x dk_y. \quad (13.32)$$

Insertando esta solución en z en la solución de $\mathbf{E}(x, y, z)$ se obtiene

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 e^{-i\omega t} \iint \mathbf{E}_0(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} dk_x dk_y. \quad (13.33)$$

que nos permite obtener el campo en cualquier posición como descomposición en ondas planas.

Para complicar el asunto, podemos volver a introducir la definición de $\mathbf{E}_0(k_x, k_y)$, vista en (13.25). Esta descomposición de ondas planas en función del campo in-

cidente viene determinada por una transformada de Fourier, que proporciona 2 integrales. Por consiguiente.

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 e^{-i\omega t} \iiint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) e^{-i(k_x \xi + k_y \eta)} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} d\xi d\eta dk_x dk_y. \quad (13.34)$$

Como se observa, esta ecuación relaciona el campo de entrada $\mathbf{E}_0(\xi, \eta)$ con el campo $\mathbf{E}(x, y, z)$ en cualquier posición posterior. Esta solución no es abordable (4 integrales acopladas entre sí) y requiere una simplificación. En primer lugar reordenaremos los términos. Primero juntaremos toda la dependencia con k_x y k_y

$$\mathbf{E}(x, y, z) = e^{-i\omega t} \iint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) \left[\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int \int e^{i[k_x(x-\xi) + k_y(y-\eta) + k_z z]} dk_x dk_y \right] d\xi d\eta. \quad (13.35)$$

El término entre corchetes se define como función de Green

$$h(\xi, \eta; z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int e^{i[k_x \xi + k_y \eta + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z]} dk_x dk_y, \quad (13.36)$$

y entonces el campo difractado se determina como

$$\mathbf{E}(x, y, z) = e^{-i\omega t} \iint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (13.37)$$

que resulta ser una convolución

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(\xi, \eta) * h(\xi, \eta; z). \quad (13.38)$$

Esto nos indica de nuevo que el proceso de propagación es lineal. La integral $h(\xi, \eta; z)$ se puede resolver de forma exacta [?]

$$h(\xi, \eta; z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{z}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (13.39)$$

donde $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}$. Como normalmente $\lambda \ll R$ y considerando $\cos\theta = z/R$ la función de Green para la propagación se simplifica

$$h(\xi, \eta; z) \approx ik \cos\theta \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (13.40)$$

De esta forma, el problema de la difracción se simplifica a resolver la siguiente integral

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = ike^{-i\omega t} \iint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) \cos\theta \frac{e^{ikR}}{R} d\xi d\eta.} \quad (13.41)$$

El problema de la polarización

El enfoque hasta aquí utilizado es exacto, excepto en la aproximación de elemento delgado, donde hemos asumido un proceso lineal para el cálculo del campo de salida en función del campo de entrada en la máscara. No obstante, no se ha considerado un problema que reside en la necesidad de que las ondas planas en las

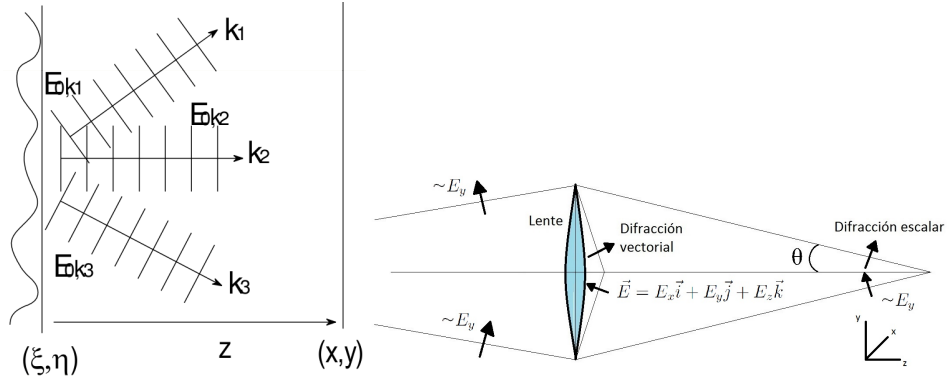


Figura 13.15: El estado de polarización de la onda plana difractada debe cambiar respecto a la onda incidente puesto que cada onda plana debe mantener la transversalidad del campo.

cuales se divide el campo de salida cumplan con la condición de transversalidad $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Este problema se observa claramente en 13.30. Esta onda

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(k_x, k_y)}(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \mathbf{E}_0(k_x, k_y) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 e^{-i\omega t} \mathbf{E}_0(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)}, \quad (13.42) \end{aligned}$$

tiene un vector de ondas en la dirección $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Sin embargo, si la onda incidente es una onda armónica plana y, por ejemplo, se propaga en la dirección $\mathbf{k}_0 = k(0, 0, 1)$ el campo eléctrico incidente \mathbf{E}_0 es perpendicular a \mathbf{k}_0 , pero no a \mathbf{k} . Para solucionar este enfoque es necesario “rotar” la polarización del campo eléctrico $\mathbf{E}_0(k_x, k_y)$ para que sea perpendicular a \mathbf{k} . La mejor opción es hacer que el ángulo de giro sea el menor posible. Desde el punto de vista de la asignatura, esto no lo consideraremos, pues en la aproximación de Fresnel vamos a asumir que la deflexión del haz es muy pequeña y entonces el estado de polarización de las ondas planas no cambia significativamente.

Un enfoque más riguroso es el proporcionado por J.A. Stratton, L.J. Chu “*Diffraction Theory of Electromagnetic Waves*” *Physical Review* 56, 99-107 (1939), M. Nieto-Vesperinas “*Scattering and diffraction in physical optics*” World Scientific Publishing Company (2006)

CONCLUSIONES

- El fenómeno de la difracción se deriva directamente de las ecuaciones electromagnéticas como dos procesos
 - Propagación de la luz dentro del elemento difractor.
 - Propagación de la luz en el vacío.
- Los medios materiales (aperturas, dieléctricos, etc.) modifican el frente de ondas y hacen que un haz plano deje de serlo.
- Cualquier onda electromagnética se puede descomponer en una combinación lineal de ondas planas.

APROXIMACIÓN DE CAMPO CERCANO

Los métodos rigurosos para la propagación de la luz no permiten, en la mayoría de los casos, obtener resultados analíticos sencillos. Por ello, es común desarrollar aproximaciones como los regímenes de Fresnel y de Fraunhofer. La aproximación de Fresnel es útil en campo cercano, cuando la distancia al elemento difractor es pequeña.

Índice

14.1	Introducción	195
14.2	Rango de validez	196
14.3	Método de cálculo	196
14.4	Difracción por estructuras unidimensionales	198
14.5	Difracción por un semiplano	198
14.6	Difracción por una rendija	199
14.7	Difracción por una abertura cuadrada	201
14.8	Campo en el plano de Fourier de una lente	201
14.9	Difracción por una abertura circular	202

OBJETIVOS

- Saber simplificar los modelo de ondas planas a las aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer.
- Conocer la fenomenología relacionada con la difracción en campo cercano.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo por ondas planas es general, aunque tiene diversos problemas de cálculo, pues es necesario resolver integrales donde en los exponentes aparecen raíces cuadradas. Una forma de poder tratar problemas reales y obtener soluciones analíticas es realizar aproximaciones sobre $h(\xi, \eta; z)$. Para ello consideraremos que los tamaños del elemento difractor y del plano de observación son bastante menores que la distancia de propagación, $x, \xi, y, \eta \ll z$. Entonces, por un lado $\cos\theta \approx 1$ y podemos asimismo realizar un desarrollo en series de la raíz cuadrada de r

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{z^2} + \frac{\eta^2}{z^2}} \approx z\left(1 + \frac{\xi^2}{2z^2} + \frac{\eta^2}{2z^2}\right). \quad (14.1)$$

Con esta aproximación, la función de Green se resuelve

$$h(\xi, \eta; z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik\left[z + \frac{1}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right]}, \quad (14.2)$$

que se denomina propagador de Fresnel llegando al resultado de la aproximación de Fresnel a la difracción

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\lambda z} e^{i(kz - \omega t)} \iint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta. \quad (14.3)$$

*aproximación de
Fresnel*

Desarrollando el término exponencial podemos ver que esta ecuación se puede escribir como una transformada de Fourier de la forma¹

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik(z + \frac{x^2+y^2}{2z})}}{i\lambda z} TF \left[\mathbf{E}_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \right], \quad (14.4)$$

donde, recordamos $\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = t(\xi, \eta) \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta)$, según la aproximación de elemento delgado.

RANGO DE VALIDEZ

En general, la aproximación de Fresnel impone limitaciones en las dimensiones de la apertura y en la posición del punto de observación. conocer el rango de la aproximación de Fresnel hay que considerar cuándo el primer término despreciado, el término cúbico, vale 1, es decir, que su fase sea despreciable. Calculando este término y obligando a que sea muy pequeño, obtenemos el rango de validez

$$z \gg \sqrt[3]{\frac{\pi}{4\lambda} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]_{max}^2}. \quad (14.5)$$

Para poder determinar el valor de la distancia, también se puede utilizar el número de Fresnel, n_F , que se define como

$$n_F = \frac{a^2}{\lambda z}, \quad (14.6)$$

donde a es el tamaño máximo del elemento difractor. Cuando resulta que $n_F \gg 1$ podemos considerar que la aproximación de Fresnel es válida. cuando $n_F \rightarrow \infty$, es válida la aproximación geométrica, Figura 14.1.

MÉTODO DE CÁLCULO

La integral de Fresnel (14.3) no se puede resolver de forma analítica en el caso general. No obstante, existen diversos problemas de gran interés, como veremos en este tema, donde es posible resolver las integrales involucradas. La siguiente integral se utiliza frecuentemente en la aproximación de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}-c}. \quad (14.7)$$

En el caso que esta integral no se compute en todo el rango, sino de 0 a x se obtiene

$$\int_0^x e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}-c} \operatorname{erf} \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right). \quad (14.8)$$

Para resolver esta integral, existen dos funciones, el coseno de Fresnel y el seno de Fresnel que se definen como, Figura 14.2,

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos \left(\pi t^2 / 2 \right) dt, \quad (14.9)$$

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin \left(\pi t^2 / 2 \right) dt. \quad (14.10)$$

¹ a partir de ahora eliminamos el término $e^{-i\omega t}$

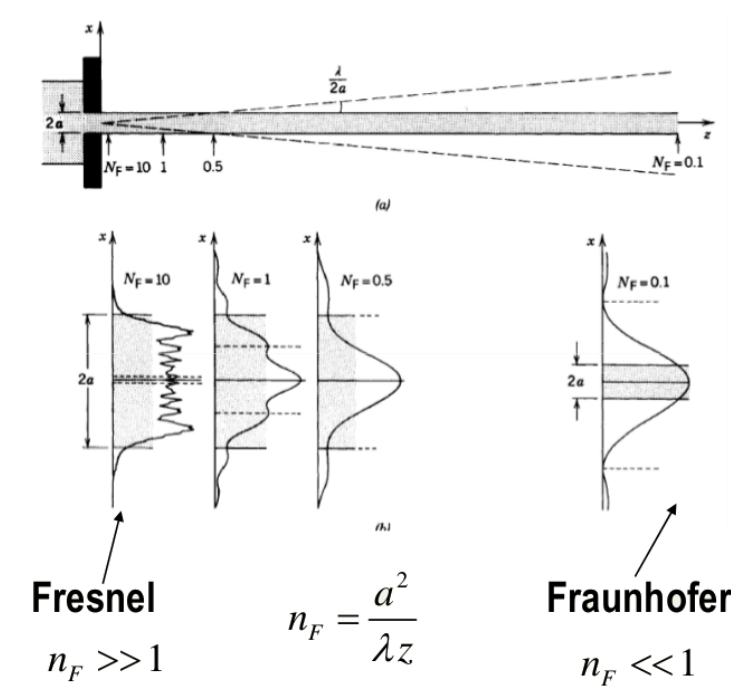


Figura 14.1: Número de Fresnel y evolución de la distribución de intensidad entre los diferentes regímenes.

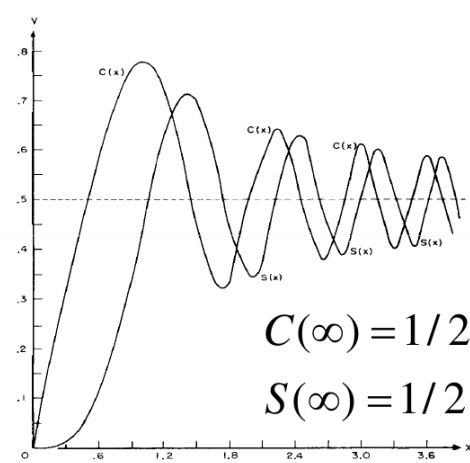


Figura 14.2: Funciones $C(x)$ y $S(x)$. Cuando $x \gg$ entonces estas integrales se aproximan a un coseno y a un seno.

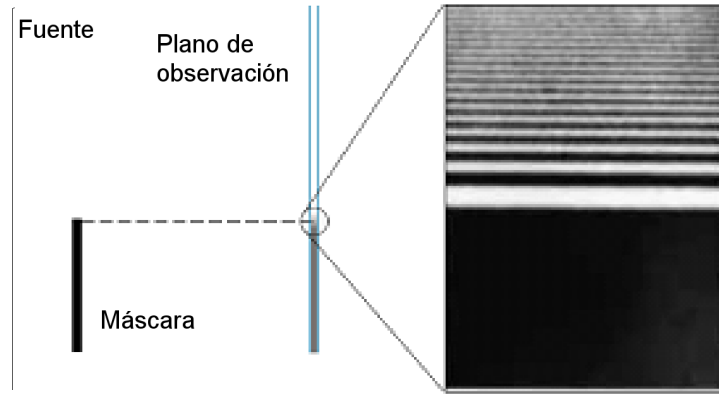


Figura 14.3: Esquema de la difracción en campo cercano por un semiplano.

Ahora, con la facilidad de cálculo actual de los ordenadores, la integral se suele resolver numéricamente.

DIFRACCIÓN POR ESTRUCTURAS UNIDIMENSIONALES

En muchas ocasiones el elemento difractivo depende solamente de una variable espacial. Esto significa que el campo a la salida del haz se puede escribir como $\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = \mathbf{E}_0(\xi)$. Esto permite resolver una de las integrales, puesto que entonces el campo se puede escribir como

$$E(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int \mathbf{E}_0(\xi) e^{i\frac{k}{2z}(x-\xi)^2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2z}(y-\eta)^2} d\eta, \quad (14.11)$$

y mediante (14.7) la segunda integral se resuelve de forma sencilla, resultando

$$\mathbf{E}(x, z) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} e^{ikz} \int \mathbf{E}_0(\xi) e^{i\frac{k}{2z}(x-\xi)^2} d\xi. \quad (14.12)$$

Esto simplifica aún más los cálculos, pues solo tenemos que resolver una única integral. El kernel de convolución aquí se asocia a una onda cilíndrica.

DIFRACCIÓN POR UN SEMIPLANO

Un ejemplo muy interesante para comparar con el modelo geométrico (existe una sombra abrupta igual a la proyección del objeto) es el caso de un semiplano. Sea una onda plana monocromática en incidencia normal que ilumina dicho semiplano, Figura 14.3. El problema puede ser tratado como unidimensional y por consiguiente (14.12) es válida. Incluyendo el coeficiente de transmisión del objeto difractor

$$t(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0, \\ 0 & \xi < 0. \end{cases} \quad (14.13)$$

esta integral se convierte en

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} e^{ikz} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_0(\xi) e^{i\frac{k}{2z}(x-\xi)^2} d\xi.$$

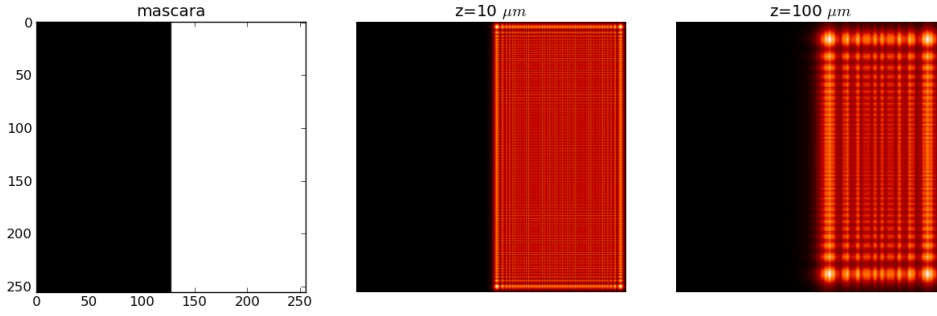


Figura 14.4: Intensidad en campo cercano generada por un semiplano a 2 distancias para $\lambda = 0,6328\mu m$. A $z = 10\mu m$ la difracción se aproxima mucho al modelo geométrico, mientras que a $z = 100\mu m$ se producen fluctuaciones en forma de máximos y mínimos.

En la Figura 14.4, se resuelve la integral numéricamente y se muestra el plano inicial en $z = 0$, que se ilumina con una onda armónica plana de longitud de onda $\lambda = 0,6328\mu m$. Cuando se propaga muy pocas micras, la aproximación de Fresnel ya empieza a ser válida. La distribución de intensidad es muy parecida al modelo geométrico, aunque aparecen las fluctuaciones en la zona de transición. La distribución de intensidad en el campo cercano no es abrupta sino que aumenta de forma gradual realizando posteriormente un “rizado” alrededor del valor máximo. Muy lejos del borde la intensidad es la que geoméricamente esperábamos, pero esto no ocurre así cerca del borde. Asimismo, La posición más cercana al borde que cumple $I(x, z) = I_0$ sucede cuando

$$x = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}. \quad (14.14)$$

Claro está que cuanto más cerca estemos del borde o la longitud de onda sea menor, más nos acercaremos al modelo geométrico de difracción por un borde. Si analizamos el perfil, Figura 14.5, la distribución de intensidad se separa al modelo geométrico (línea roja). En primer lugar la luz entra dentro de la zona de sombra (zona negra con $h < 0$). Asimismo, se ven las fluctuaciones cercanas al borde, donde la intensidad es mayor que la unidad. El periodo de las fluctuaciones es cada vez menor y la altura de las fluctuaciones cada vez se aproxima más a $I = 1$.

DIFRACCIÓN POR UNA RENDIJA

El caso de la rendija es muy similar al del semiplano excepto por los límites de integración

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} e^{ikz} \mathbf{E}_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{i\frac{k}{2z}(x-\xi)^2} d\xi. \quad (14.15)$$

En la Figura 14.6 se resuelve numéricamente esta integral para una rendija de $10\mu m$ de tamaño. Para distancias muy cercanas se observa lo mismo que para el semiplano: la luz entra en la zona de sombra y en la zona de iluminación aparecen fluctuaciones. Cuanto más nos separamos de la máscara, la distribución de intensidad es cada vez más diferente al caso geométrico. Aparecen máximos y mínimos de intensidad y, para z muy grandes, (número de Fresnel $N_F = a^2/z\lambda \ll 1$) la distribución de intensidad se va aproximando a la transformada de Fourier de la rendija, como veremos en la aproximación de Fraunhofer.

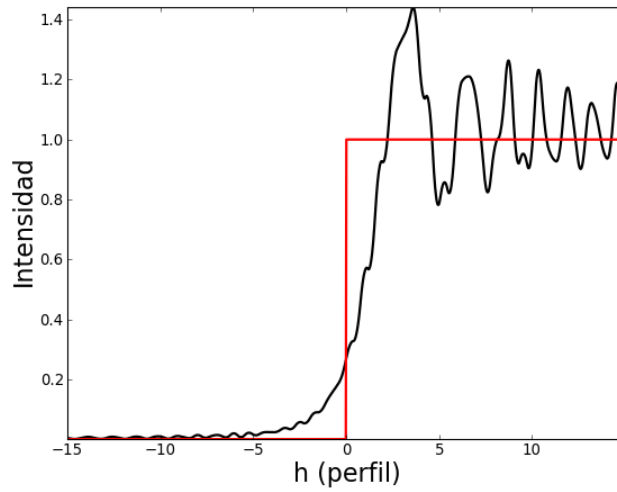


Figura 14.5: Intensidad en campo cercano generada por un semiplano a una distancia muy cercana. La longitud de onda del haz incidente es $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$. Parece que se aproxima a un modelo geométrico. Si observamos un perfil de intensidad, entonces se observan fluctuaciones (rojo es el modelo geométrico). La luz se introduce en la zona de sombra ($h < 0$). También se observa que el máximo de intensidad no coincide con $h = 0$, sino que está a una distancia superior ($h \approx 4 \mu\text{m}$).

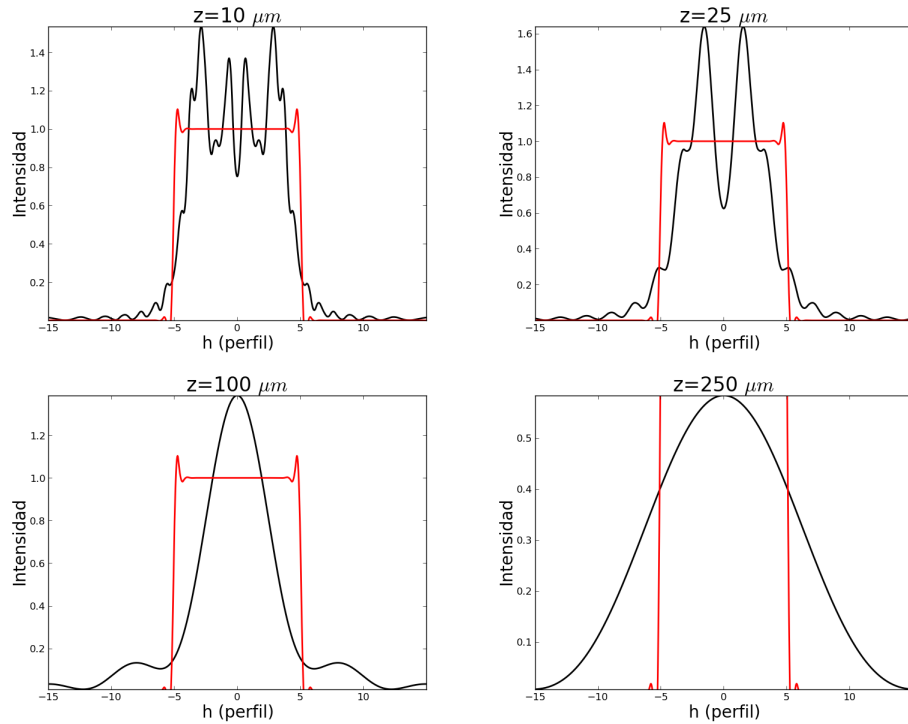


Figura 14.6: Campo cercano a distintas distancias de una rendija de $10 \mu\text{m}$ de anchura.

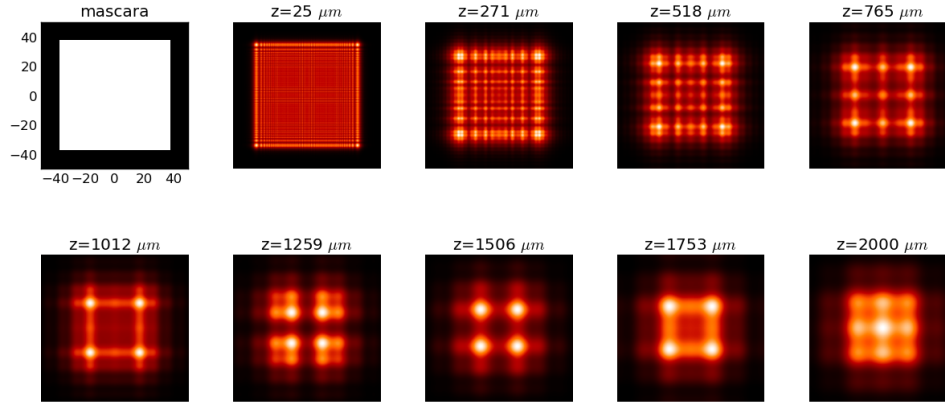


Figura 14.7: Intensidad obtenida mediante la aproximación de Fresnel para una abertura cuadrada de lado $a = 75\mu m$, iluminada con un haz plano con longitud de onda $\lambda = 0,6328\mu m$ para diversas distancias.

DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CUADRADA

Otro ejemplo significativo es el caso de la difracción por una abertura cuadrada. A distintas distancias vemos que aparecen distribuciones bastante distintas al modelo geométrico. Por ejemplo, para $z = 1500\mu m$ aparecen 4 máximos de intensidad, mientras que a $z = 2000\mu m$ aparece otra vez una distribución cuadrada bastante uniforme, pero con un tamaño menor. Este tipo de estudios es muy importante en aplicaciones como fotolitografía, para la grabación de placas microelectrónicas de circuitos impresos. Hay formas de obtener la distribución deseada a una cierta distancia, modificando la máscara.

CAMPO EN EL PLANO DE FOURIER DE UNALENTE

Un problema de gran interés es analizar qué ocurre en el plano focal de una lente convergente. Vimos en (13.18) que la transmitancia de una lente tiene la forma

$$t(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) \exp \left[-ik \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2f'} \right], \quad (14.16)$$

donde $P(\xi, \eta)$ es el diafragma que produce la lente y f' es la focal imagen. La distribución de intensidad en campo cercano viene dado por (14.3)

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint E_0(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta \quad (14.17)$$

donde el campo justo a la salida de la lente resulta

$$E_0(\xi, \eta) = E_{inc}(\xi, \eta) P(\xi, \eta) \exp \left[-ik \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2f'} \right]. \quad (14.18)$$

Esto significa, por ejemplo, que si el haz incidente es una onda plana, a la salida de la lente tiene un frente de ondas esférico, convergente si la focal es positiva y divergente si la focal es negativa, Figura 14.8. Introduciendo (14.18) en (14.3)

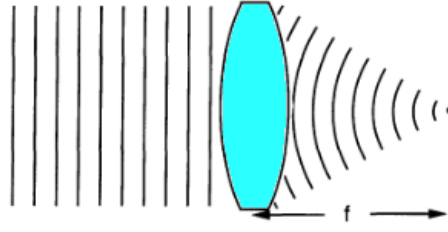


Figura 14.8: Cuando incide un haz plano sobre una lente convergente, el haz de salida es esférico.

obtenemos que el campo resulta

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) P(\xi, \eta) e^{i\frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f'}\right) + i\frac{k}{z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (14.19)$$

En el plano focal de la lente $z = f'$ y la integral se simplifica

$$\mathbf{E}(x, y, f') = \frac{e^{ikf'}}{i\lambda f'} \iint \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) P(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{f'}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (14.20)$$

Lo que nos indica que en el plano focal de una lente el campo obtenido no es un punto, como asume la óptica geométrica, la transformada de Fourier del campo justo después de la lente. Esto lo analizaremos con más detalle en la aproximación de Fraunhofer. Si el campo incidente es una onda plana en incidencia normal, $\mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) = \mathbf{E}_0$, el campo en el plano focal de la lente resulta

$$\mathbf{E}(x, y, f') = \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikf'}}{i\lambda f'} TF[P(\xi, \eta)]. \quad (14.21)$$

Este resultado es muy importante. El campo en el plano focal de la lente no es un punto sino la transformada de Fourier de la pupila. Este es el motivo por el que los telescopios y, en general, todos los instrumentos ópticos, funcionan mejor cuanto mayor es la lente. Si la lente fuera de un tamaño infinito, entonces se cumple la aproximación geométrica

$$\mathbf{E}(x, y, f') = \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikf'}}{i\lambda f'} \delta(x, y). \quad (14.22)$$

Por ejemplo, en la Figura 14.9 se muestra la distribución de intensidad en el plano focal imagen y el perfil radial.

DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CIRCULAR

Sea el caso de la abertura circular de radio R donde iluminamos con una onda plana en incidencia normal $\mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) = \mathbf{E}_0$. Para calcular el campo en un punto $P_0 = (x, y, z)$ vamos a considerar la simetría del problema. Para ello realizaremos un cambio de coordenadas a polares, $\xi = \rho \cos\theta$, $\eta = \rho \sin\theta$, $x = \rho' \cos\theta'$, $y = \rho' \sin\theta'$. Entonces, introduciendo el coeficiente de transmisión para una abertura circular

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < R, \\ 0 & \text{resto.} \end{cases} \quad (14.23)$$

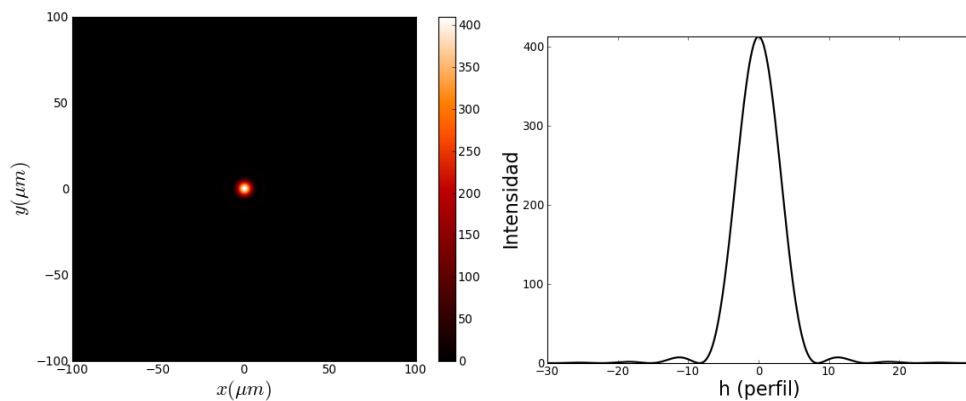


Figura 14.9: Difracción en campo cercano producido por una lente. En la posición focal aparece el conocido disco de Airy, que analizaremos con más detalle en la aproximación de Fraunhofer.

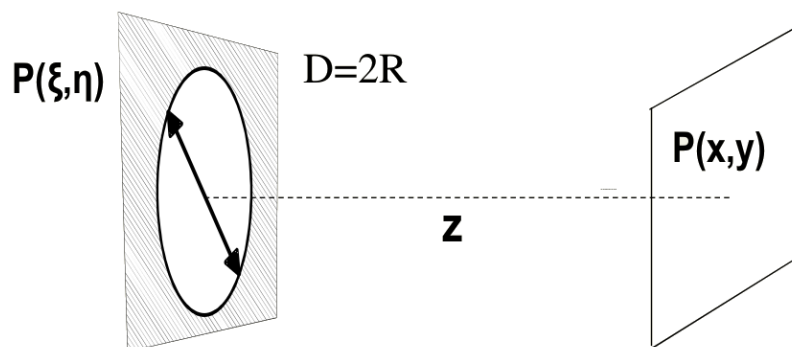


Figura 14.10: Abertura circular.

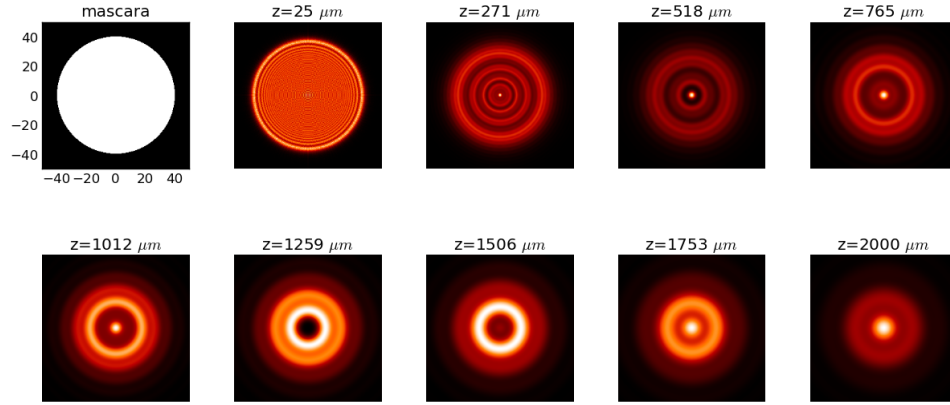


Figura 14.11: Intensidad obtenida mediante la aproximación de Fresnel para una abertura de radio $a = 40\mu m$, iluminada con un haz plano con longitud de onda $\lambda = 0,5\mu m$ para diversas distancias.

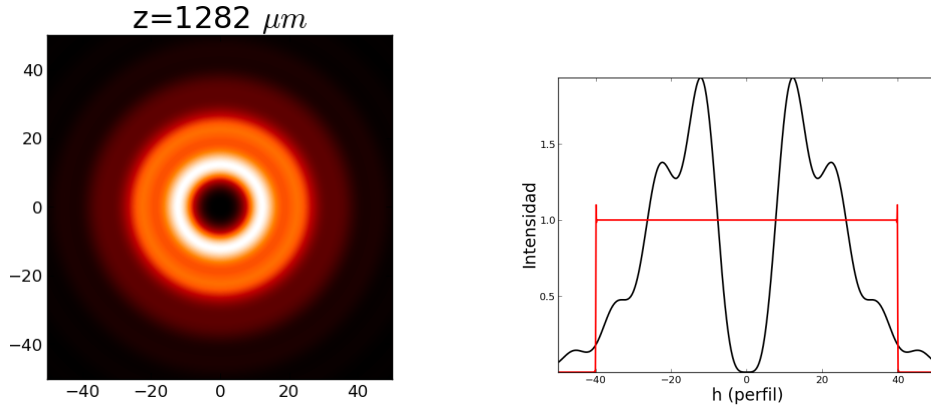


Figura 14.12: Intensidad obtenida mediante la aproximación de Fresnel para una abertura de radio $a = 40\mu m$, para la distancia $z = z_{Fresnel}/2$, donde $z_{Fresnel} = a^2/\lambda$.

reordenando y considerando que $d\zeta d\eta = \rho d\rho d\theta$, el campo difractado resulta

$$E(P_0) \cong \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} E_0 e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\frac{k}{2z}[\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta)]}. \quad (14.24)$$

Esta integral es complicada de resolver analíticamente. En la Figura 14.11 se muestra la intensidad difractada para diversas distancias, obtenida por un cálculo numérico. Se observa que cuando estamos muy cerca del objeto, la intensidad se parece a la geométrica excepto por una serie de anillos de luz cerca de los bordes. Sin embargo, en la zona central la intensidad es bastante uniforme. No obstante, a medida que nos separamos el comportamiento se separa del geométrico apareciendo máximos y mínimos de luz en el centro del círculo.

Incluso, existe una posición en la cual la intensidad de luz desaparece en el centro del círculo, como se observa en la Figura 14.12.

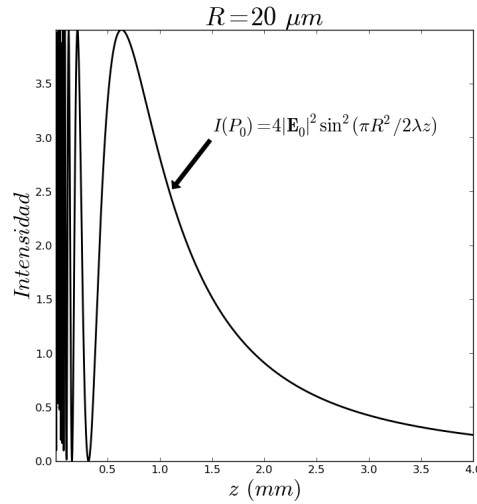


Figura 14.13: Distribución de intensidad en el eje. A partir de una cierta distancia el decaimiento es inversamente cuadrático.

Podemos analizar este comportamiento estudiando analíticamente la intensidad en el eje, puesto que esta integral sí es resoluble. Para estudiar el eje, se considera $\rho' = 0$ en (14.24)

$$E(P_0) \cong \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \mathbf{E}_0 e^{i\frac{k}{2z}\rho'^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\frac{k}{2z}\rho^2}. \quad (14.25)$$

La dos integrales se pueden resolver de forma sencilla, obteniéndose

$$E(P_0) = \mathbf{E}_0 e^{ikz} \left(e^{i\frac{k}{2z}R^2} - 1 \right), \quad (14.26)$$

por lo que la intensidad es

$$I(P_0) = 4|\mathbf{E}_0|^2 \sin^2 \left(\frac{\pi R^2}{2\lambda z} \right). \quad (14.27)$$

En distancias más cercanas tenemos fuertes fluctuaciones que son más rápidas a medida que nos acercamos a la máscara. La última fluctuación aparece cuando $\pi R^2/(2\lambda z) = \pi$, es decir, $z = R^2/2\lambda$ y cuando $z \rightarrow \infty$, mediante un desarrollo en series se obtiene

$$I(P_0) \approx |\mathbf{E}_0|^2 \left(\frac{\pi R^2}{z\lambda} \right)^2, \quad (14.28)$$

que presenta un decaimiento cuadrático con la distancia, como se muestra en la Figura 14.13.

CONCLUSIONES

- La aproximación de Fresnel es menos restrictiva que la de Fraunhofer y se aplica cuando no estamos excesivamente cerca. El número de Fresnel es un parámetro que nos informa sobre cuál aproximación hay que utilizar.

APROXIMACIÓN DE CAMPO LEJANO

Cuando la distancia al elemento difractor es suficientemente grande, la aproximación de Fraunhofer nos permitirá obtener resultados analíticos con mayor facilidad a partir de la transformada de Fourier. La difracción tiene importancia en el análisis de instrumentos ópticos, pues limita su capacidad de resolución.

Índice

15.1	Aproximación de Fraunhofer	207
15.2	Aproximación de Fraunhofer en el plano focal de una lente . . .	208
15.3	Propiedades de la transformada de Fourier	209
15.4	Principio de Babinet en aproximación de Fraunhofer	210
15.5	Abertura rectangular	212
15.6	Rendija unidimensional	213
15.7	Difractometría	215
15.8	Doble rendija	216
15.9	Abertura circular	217
15.10	Poder resolutivo de los instrumentos ópticos	218

OBJETIVOS

- Conocer la fenomenología relacionada con la difracción en campo lejano. Saber calcular ejemplos sencillos.
- Conocer y aplicar el principio de Babinet
- Saber que los instrumentos ópticos están limitados por el poder resolutivo.

APROXIMACIÓN DE FRAUNHOFER

La aproximación de Fresnel explica bien el comportamiento ondulatorio de la luz cuando ésta se propaga en distancias más o menos cercanas. Ahora bien, cuando el número de Fresnel es muy pequeño $n_F = a^2/(\lambda z) \ll 1$, se puede hacer una aproximación más restrictiva, la aproximación de Fraunhofer, que permite obtener resultados analíticos y numéricos de una forma más sencilla. En la aproximación de Fraunhofer, no nos quedamos con los términos cuadráticos, sino que éstos se consideran muy pequeños y únicamente consideramos los términos lineales de la exponencial

$$\frac{k}{2z} \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] = \frac{k}{2z} \left(x^2 + \xi^2 - 2\xi x + y^2 + \eta^2 - 2\eta y \right). \quad (15.1)$$

Es fácil eliminar x^2 y y^2 , pues no hay que integrar sobre ellos. Más difícil es librarse de ξ^2 y η^2 . La aproximación de Fraunhofer consiste precisamente en decir que su contribución a la integral es pequeña. Dicho de otro modo

$$\frac{k}{2z} \left(\xi^2 + \eta^2 \right)_{\text{máx}} \ll 1, \quad (15.2)$$

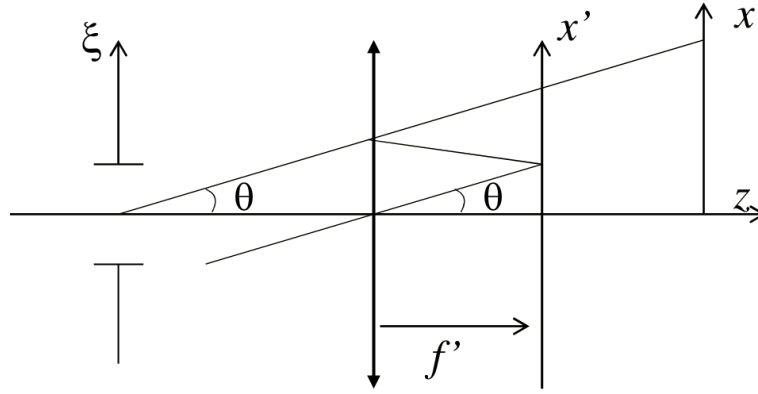


Figura 15.1: Uso de una lente convergente donde el campo difractado en el plano focal (aproximación de Fresnel) es semejante al campo lejano (aproximación de Fraunhofer). Se incluye el sistema de coordenadas.

resultando que la aproximación de Fraunhofer es válida cuando

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda} (\xi^2 + \eta^2)_{\text{máx}} = \frac{\pi a^2}{\lambda}, \quad (15.3)$$

es decir, cuando $z \gg z_F$. Despreciando los términos cuadráticos en la fase y quedándonos únicamente con los lineales obtenemos

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{e^{ik(z + \frac{x^2 + y^2}{2z})}}{i\lambda z} \iint \mathbf{E}_0(\xi, \eta) e^{-i\frac{k}{z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (15.4)$$

Si definimos la transformada de Fourier como

$$\hat{f}(v) = TF[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i \xi v} d\xi, \quad (15.5)$$

el campo a una distancia suficientemente lejana se puede obtener como la transformada de Fourier del campo justamente después del objetivo difractor, $\mathbf{E}_0(\xi, \eta) = t(\xi, \eta) \mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta)$

aproximación de
Fraunhofer

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{e^{ik(z + \frac{x^2 + y^2}{2z})}}{i\lambda z} TF[\mathbf{E}_0(\xi, \eta)], \quad (15.6)$$

donde en nuestro caso $v = x/\lambda z$.

Esta fórmula es de gran interés puesto que las propiedades de la transformada de Fourier son muchas y conocidas.

APROXIMACIÓN DE FRAUNHOFER EN EL PLANO FOCAL DE UNALENTE

Como hemos visto en la sección 14.8, hay una forma de satisfacer la condición de Fraunhofer sin alejarse mucho de la abertura. Consiste utilizar una lente delgada convergente y mirar en el plano de Fourier.

Al incluir una lente de este tipo, la luz que iría a parar a un P_0 en el infinito va a concurrir, de hecho, sobre el plano focal imagen de la lente. Ubicaremos la lente,

$f(x)$	$F(s)$	
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{s}{a}\right)$	Similitud: cuanto más ancho es el objeto, más estrecha es su figura de difracción
$f(x) + g(x)$	$F(s) + G(s)$	Adición: Difracción es lineal en los campos
$f(x - a)$	$e^{-i2\pi as} F(s)$	Desfase: Se produce un desfase al desplazar el objeto
$f(x) \cos \omega x$	$\frac{1}{2} F\left(s - \frac{\omega}{2\pi}\right) + \frac{1}{2} F\left(s + \frac{\omega}{2\pi}\right)$	Modulación
$f(x) * g(x)$	$F(s)G(s)$	Convolución
$f(x) * f^*(-x)$	$ F(s) ^2$	Autocorrelación
$f'(x)$	$i2\pi s F(s)$	Derivada
$\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = f'(x) * g(x) = f(x) * g'(x)$		Derivada de convolución
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) ^2 ds$		La energía se conserva
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G^*(s) ds$		Potencia
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G(s) ds$		(f y g real)

Figura 15.2: Propiedades de la transformada de Fourier.

por sencillez, paralela al plano que contiene la abertura. Según (14.21) el campo es la transformada de Fourier de la pupila

$$\mathbf{E}(x, y, f') = \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikf'}}{i\lambda f'} TF[P(\xi, \eta)], \quad (15.7)$$

Mediante consideraciones geométricas que se muestran en la Figura 15.1,

$$\begin{aligned} \tan \theta_x &= \frac{x}{z} = \frac{x'}{f'} \\ \tan \theta_y &= \frac{y}{z} = \frac{y'}{f'} \end{aligned} \quad (15.8)$$

de donde

$$\begin{aligned} x' &= xf'/z, \\ y' &= yf'/z. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Por consiguiente, el campo en el plano focal de la lente (14.21) resulta

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{e^{ik(z + \frac{x^2 + y^2}{2z})}}{i\lambda z} \int \mathbf{E}_0(\xi, \eta) e^{-i\frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)} d\xi d\eta. \quad (15.10)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Puesto que el campo difractado en campo lejano se calcula a través de la transformada de Fourier, sabiendo las propiedades de la transformada de Fourier se puede conocer las propiedades del campo lejano. En la Figura 15.2 se muestran algunas de las propiedades:

1. Cuanto más ancho es el objeto, más estrecha es su figura de difracción.
2. Fenómeno lineal en el campo: ¡ya sabíamos!
3. Se produce un desfase al desplazar el objeto.

Function	Transform
$\exp[-\pi a^2 x^2]$	$\frac{1}{ a } \exp\left[-\pi \frac{\xi^2}{a^2}\right]$
$\text{Rect}(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{sinc}(\xi/a)$
$\Lambda(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{sinc}^2(\xi/a)$
$\delta(x)$	1
$\exp[j\pi ax]$	$\delta(\xi - a/2)$
$\text{Sgn}(ax)$	$\frac{a}{ a } \frac{1}{j\pi\xi}$
$\text{comb}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0-na)$	$ a \text{comb}\left(\frac{\xi}{1/a}\right) \exp[-j2\pi x_0 \xi]$
$\exp[j\pi a^2 x^2]$	$\frac{1}{ a } \exp[j\pi/4] \exp\left[-j\pi \frac{\xi^2}{a^2}\right]$
$\exp[-a x]$	$\frac{1}{ a } \frac{2}{1+(2\pi\xi/a)^2}$
$\cos(2\pi\xi_0 x)$	$\frac{1}{2} \delta(\xi + \xi_0) + \frac{1}{2} \delta(\xi - \xi_0)$
$\sin(2\pi\xi_0 x)$	$\frac{-j}{2} \delta(\xi + \xi_0) + \frac{j}{2} \delta(\xi - \xi_0)$
$\text{Circ}(r)$	$\mathbf{B}_p[\text{circ}(r)] = \frac{1}{2\pi p^2} \int_0^{2\pi p} r' J_0(r') dr' = \frac{J_1(2\pi p)}{p}$

Figura 15.3: Ejemplos de transformadas de Fourier.

4. La energía en campo lejano es igual a la energía justo después del elemento difractor.

También se conocen las transformadas de Fourier de gran cantidad de funciones, por lo que se puede conocer la distribución del campo obtenida en campo lejano. Algunas de esas funciones se muestran en Figura 15.3.

PRINCIPIO DE BABINET EN APROXIMACIÓN DE FRAUNHOFER

El proceso de difracción que hemos estudiado es un proceso lineal. Por ello, podemos dividir la apertura en zonas geoméricamente separadas, S_1, S_2, \dots, S_n donde $S_{total} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ representa el campo total transmitido por la apertura. La propagación de partes separadas se puede concatenar y el resultado después de la propagación se puede añadir para producir el campo de la abertura completa

$$\mathbf{E}_{total} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n. \quad (15.11)$$

Esta ecuación es, en esencia, el principio de Babinet. El campo difractado de una apertura se puede descomponer en componentes y propagarlo separadamente. Esto permite realizar una sencilla “álgebra de aperturas” y dividir un problema de difracción complejo en función de distribuciones conocidas más sencillas, como se muestra en la Figura 15.4.

Una consecuencia importante relacionada con el principio de Babinet es el principio de aperturas complementarias, Figura 15.5. El principio de Babinet determina cómo se relacionan figuras de difracción producidas por aperturas complementarias. En la Figura 15.6, si las aperturas D y E son complementarias, es decir $D + E = 1$, El campo de D se puede calcular a través del campo en E mediante

$$E_D + E_E = E_\infty \quad (15.12)$$

abertura + complementario = incidente

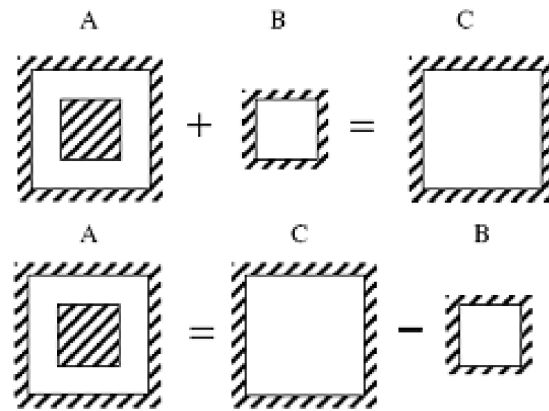


Figura 15.4: Álgebra de aperturas. Se puede conocer el campo difractado por una abertura compleja si sabemos escribirla como combinación de aperturas más sencillas. Por ejemplo, la apertura A se puede descomponer en dos aperturas C-B. Los campos llevarán también esta relación.

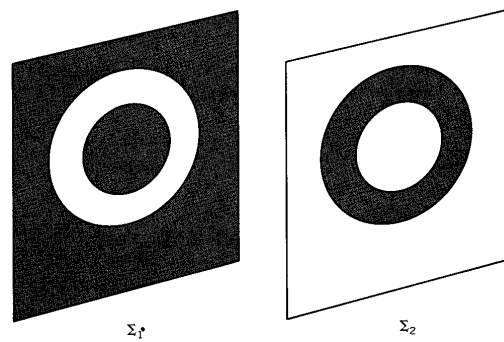


Figura 15.5: Dos máscaras complementarias.

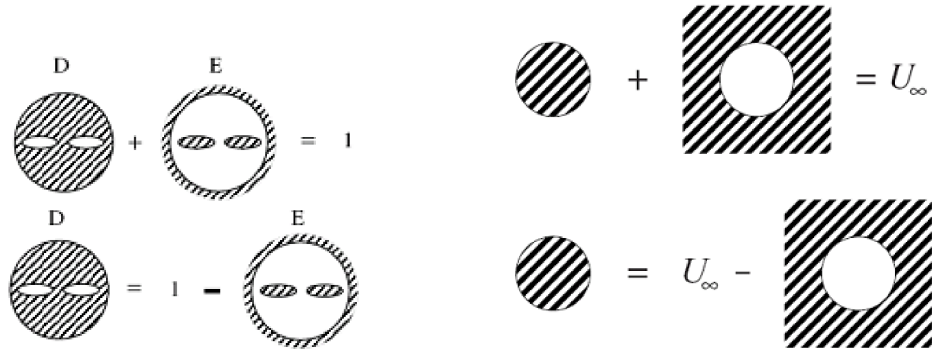


Figura 15.6: En la imagen vemos distintas aberturas complementarias. Por el principio de Babinet podemos tratar las figuras complementarias del mismo modo que las originales, siempre que incidamos con una onda plana en régimen de Fraunhofer.

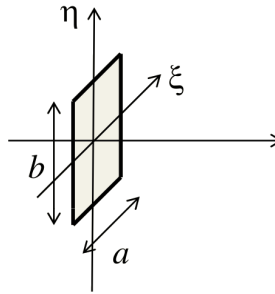


Figura 15.7: Esquema de la abertura cuadrada.

Como consecuencia de la linealidad del proceso esto resulta

$$E_D = E_\infty - E_E \quad (15.13)$$

abertura = incidente – complementario

Si el campo incidente es todo el plano, entonces $E_\infty = \delta(0)$

$$I_D = \delta(0) + I_E \quad (15.14)$$

Entonces, en campo lejano, para dos aberturas complementarias en régimen de Fraunhofer iluminadas por ondas planas las figuras de difracción son iguales salvo en un punto. Esto nos permite limitarnos a estudiar aberturas y olvidar los obstáculos.

ABERTURA RECTANGULAR

Sea una onda armónica plana, cuya incidencia no es normal, $\mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) = \mathbf{E}_0 e^{i(k_x \xi + k_y \eta)}$ que ilumina una abertura rectangular descrita mediante, Figura 15.7,

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \xi \in (-a/2, a/2) \quad \eta \in (-b/2, b/2), \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (15.15)$$

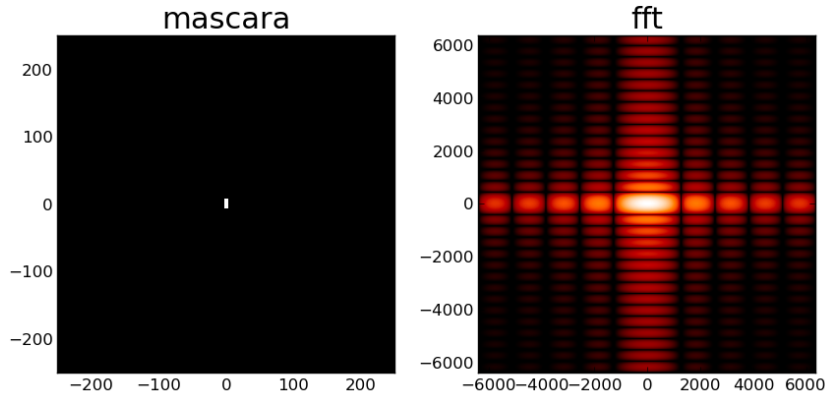


Figura 15.8: Distribución de intensidad en el campo lejano generada por una abertura rectangular.

Entonces el campo difractado se puede calcular a través de la siguiente integral. Debido a la simetría del problema la integral doble se separa en dos integrales simples

$$\mathbf{E}(x', y') = \kappa \int_{-a/2}^{a/2} d\zeta \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{E}_0 e^{i(k_x \zeta + k_y \eta)} e^{-i \frac{k}{f'} (x' \zeta + y' \eta)} d\eta, \quad (15.16)$$

donde $\kappa = \exp[ik(z + \frac{x^2 + y^2}{2z})] / i\lambda z$. Esta integral se resuelve de forma sencilla

$$\mathbf{E}(x', y') = 4\kappa ab \mathbf{E}_0 \frac{\text{sen} \left[(k_x - k \frac{x'}{f'}) \frac{a}{2} \right]}{(k_x - k \frac{x'}{f'}) \frac{a}{2}} \frac{\text{sen} \left[(k_y - k \frac{y'}{f'}) \frac{b}{2} \right]}{(k_y - k \frac{y'}{f'}) \frac{b}{2}}. \quad (15.17)$$

Por consiguiente la intensidad resulta

$$I = I_0 \text{sinc}^2 \left[(k_x - k \frac{x'}{f'}) \frac{a}{2} \right] \text{sinc}^2 \left[(k_y - k \frac{y'}{f'}) \frac{b}{2} \right], \quad (15.18)$$

donde I_0 la intensidad máxima y $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. En la Figura 15.8 se muestra una imagen de esta distribución.

Veamos algunas consecuencias que se derivan de la distribución de intensidad:

1. La distribución de intensidad presenta una serie de máximos y mínimos en las dos direcciones perpendiculares del rectángulo.
2. El máximo central es el más intenso y los siguientes decaen rápidamente.
3. En la dirección donde la abertura es más ancha, la distribución de intensidad es más estrecha. La condición de los mínimos en cada dirección resulta $(k_x - k \frac{x'}{f'}) a/2 = m\pi$ y $(k_y - k \frac{y'}{f'}) b/2 = m\pi$, con $m = \pm 1, \pm 2$.

En el caso de una abertura cuadrada, los dos perfiles son, obviamente, idénticos, como se observa en la Figura 15.10.

RENDIJA UNIDIMENSIONAL

Si en la abertura rectangular una de las dimensiones es mucho mayor que la otra se obtiene una rendija, Figura 15.11. Matemáticamente, se hace tender, por ejemplo, b a ∞ .

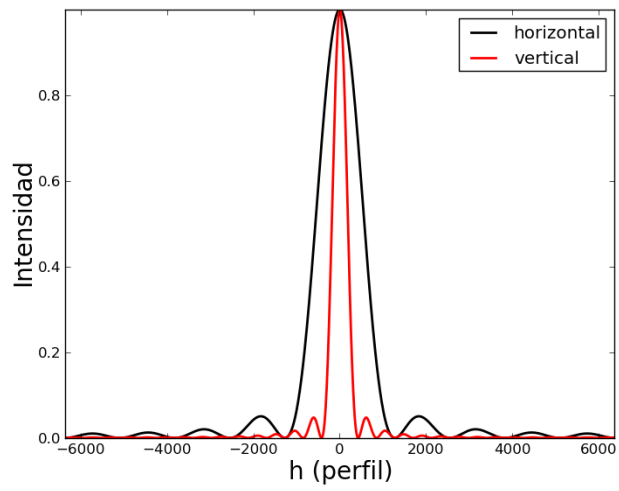


Figura 15.9: Distribución de intensidad en el campo lejano generada por una abertura rectangular.

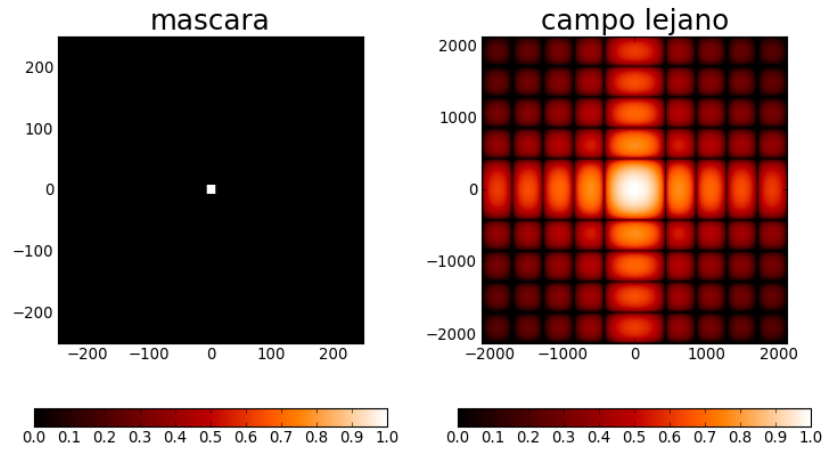


Figura 15.10: Distribución de intensidad en el campo lejano generada por una abertura cuadrada de un tamaño de $15\ \mu m$ iluminado por un haz plano cuya longitud de onda es $\lambda = 0,6328\ \mu m$.

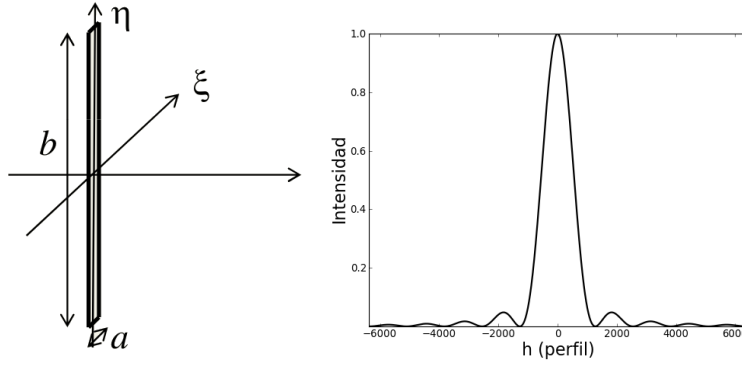


Figura 15.11: Esquema de una rendija a partir de una abertura rectangular. Intensidad en el campo lejano generada por una rendija.

La Figura de difracción se puede deducir a partir de la abertura rectangular, aunque en la dirección y' la Figura se comprime puesto que $\lim_{b \rightarrow \infty} b \operatorname{sinc}[b(y' - y_0)] = \delta(y' - y_0)$, como se muestra en la Figura 15.11.

$$I(x') = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen} \left((k_x - k \frac{x'_1}{f'}) \frac{a}{2} \right)}{(k_x - k \frac{x'_1}{f'}) \frac{a}{2}} \right]^2 \delta(y' - y_0) \quad (15.19)$$

DIFRACTOMETRÍA

Una aplicación de la difracción que presenta una gran importancia práctica es el cálculo del tamaño objetos de pequeño tamaño, comparables con la longitud de onda. Para ello se mide la distancia entre los mínimos de difracción. Esto es debido a que cuanto menor es el objeto, más separados están y mejor se pueden medir. En la dirección x' las coordenadas x'_1 del cero que limita al máximo central por la derecha y x'_{-1} del que lo limita por la izquierda son, respectivamente

$$\begin{aligned} \left(k_x - k \frac{x'_1}{f'} \right) \frac{a}{2} &= \pi \\ \left(k_x - k \frac{x'_{-1}}{f'} \right) \frac{a}{2} &= -\pi \end{aligned}$$

por lo que el tamaño del máximo central en la dirección x' resulta ser

$$\Delta x = |x'_1 - x'_{-1}| = 2f' \frac{\lambda}{a}.$$

En la dirección y' los cálculos son análogos, y su resultado es

$$\Delta y = 2f' \frac{\lambda}{b}. \quad (15.20)$$

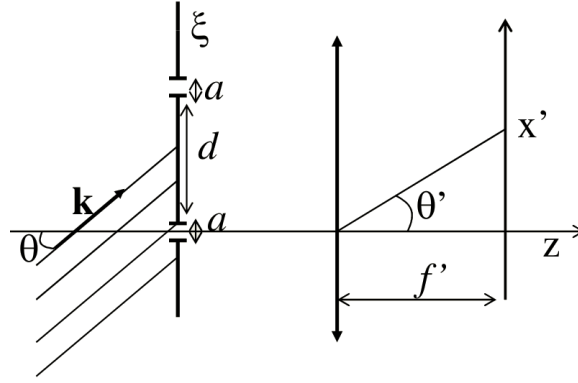


Figura 15.12: Esquema que muestra la difracción en campo lejano por una doble rendija.

Como se observa en la ecuación, la distancia Δx entre mínimos de difracción aumenta con la longitud de onda y con la longitud focal. Por otra parte, cuanto más pequeña es la abertura, mayor es la distancia entre mínimos.

DOBLE RENDIJA

Los fenómenos difractivos e interferenciales tienen la misma naturaleza y se pueden estudiar también a partir de la aproximación de Fraunhofer. Sea el esquema de la Figura 15.12 donde una onda plana donde el vector de ondas está contenido en el plano xz , $\mathbf{E}_{inc}(\xi) = \mathbf{E}_0 e^{ik_x \xi} = \mathbf{E}_0 e^{ik \xi \sin \theta}$, ilumina un sistema de dos rendijas de tamaño a separadas una distancia d .

Utilizando el esquema de la Figura 15.12, la distribución en el campo lejano resulta ser la suma en las dos aberturas

$$E(x') \propto \mathbf{E}_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{i(k \xi \sin \theta)} e^{-i \frac{k}{f'} (x' \xi)} d\xi + \mathbf{E}_0 \int_{d-a/2}^{d+a/2} e^{i(k \xi \sin \theta)} e^{-i \frac{k}{f'} (x' \xi)} d\xi, \quad (15.21)$$

Haciendo en la 2ª integral el cambio de variable $\xi' = \xi + d$ y volviendo a realizar el cambio de la variable muda obtenemos

$$E(x') \propto \mathbf{E}_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik(\sin \theta - \frac{x'}{f'}) \xi} d\xi + \mathbf{E}_0 e^{ik(\sin \theta - \frac{x'}{f'}) d} \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik(\sin \theta - \frac{x'}{f'}) \xi} d\xi. \quad (15.22)$$

Considerando que $1 + e^{i\varphi} = 2e^{i\varphi/2} \cos \varphi$ tenemos que la intensidad en el campo lejano resulta

$$I = 4I_0 \text{sinc}^2 \left[\left(\frac{x'}{f'} - \sin \theta \right) \frac{ka}{2} \right] \cos^2 \left[\left(\frac{x'}{f'} - \sin \theta \right) \frac{kd}{2} \right], \quad (15.23)$$

que es la composición de los dos efectos, difractivo dado por el término *sinc* y la interferencia, dada por el término \cos^2 . En realidad el esquema Figura 15.12 es el experimento de la doble rendija de Young donde las rendijas tienen un tamaño finito.

El problema que se plantea aquí es el problema de la interferencia entre las dos rendijas, Figura 15.13. Si tenemos una única rendija tenemos una distribución $I_1 = I_2 = \text{sinc}^2(\chi k \frac{a}{2})$, mientras que si tenemos las dos rendijas a la vez, por el hecho de ser iluminadas con una onda armónica plana tenemos un nuevo término producido por el desfase relativo en el campo. Este desfase es debido a la posición de cada una de las rendijas.

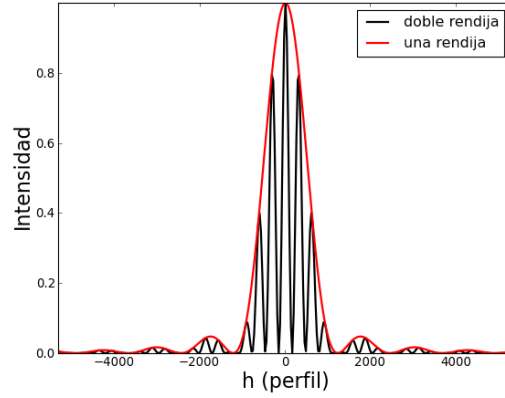


Figura 15.13: Intensidad de campo lejano de la doble rendija. Se compara con la distribución de una única rendija.

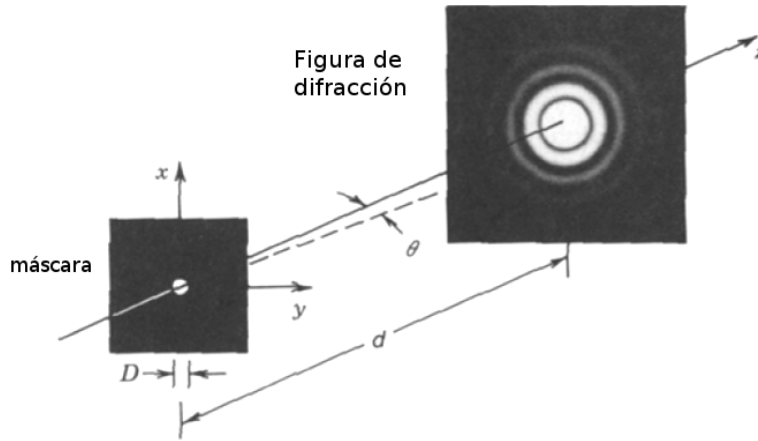


Figura 15.14: Intensidad en el campo lejano producida por una abertura circular.

ABERTURA CIRCULAR

Supongamos que una abertura circular de radio a es iluminada por una onda plana monocromática en incidencia normal $\mathbf{E}_{inc}(\xi, \eta) = \mathbf{E}_0$. La transmitancia resulta

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \forall \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < a \\ 0 & \forall \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > a \end{cases} \quad (15.24)$$

Un esquema del problema se muestra en la Figura 15.14

Debido a la simetría del problema es más conveniente escribir la transformada de Fourier en coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \theta & x' &= \rho' \cos \theta' \\ \eta &= \rho \sin \theta & y' &= \rho' \sin \theta' \end{aligned} \quad d\xi d\eta = \rho d\rho d\theta \quad (15.25)$$

Entonces la integral que rige la aproximación de Fraunhofer se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\rho', \theta') \propto \mathbf{E}_0 \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{i \frac{k}{r} \rho \rho' \cos(\theta - \theta')} d\theta \quad (15.26)$$

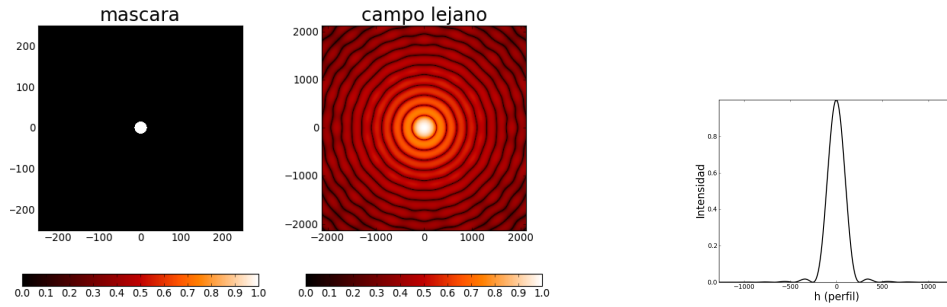


Figura 15.15: Distribución de intensidad radial producida por la apertura circular.

Por simetría, la solución es independiente de θ' por lo que mediante un sencillo cambio de variable obtenemos

$$E(\rho') \propto E_0 \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i \frac{k}{f'} \rho \rho' \cos \theta} d\theta \quad (15.27)$$

Este integral se resuelve con las funciones de Bessel

$$E(\rho') \propto 2\pi E_0 \int_0^a \rho d\rho J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{f'}\right) \propto \frac{f'}{k\rho'} R J_1\left(\frac{kR\rho'}{f'}\right) \quad (15.28)$$

difracción por una
apertura circular

por lo que la intensidad resulta

$$I = I_0 \left[\frac{J_1\left(\frac{k\rho\rho'}{f'}\right)}{\frac{k\rho\rho'}{f'}} \right]^2, \quad (15.29)$$

que se muestra en la Figura 15.15.

La energía relativa de los primeros lóbulos resulta ser: 1er anillo: 84 %, 2º anillo: 7 %, 3er anillo: 2.8 %. definida como la intensidad total dentro de cada lóbulo.

$$Q = \int_{P_n}^{P_{n+1}} 2\pi \left(\frac{J_1(z)}{z} \right)^2 z dz \quad (15.30)$$

El tamaño de la mancha central se puede calcular obteniendo el radio del máximo central (que concentra el 84 % de la luz). El radio del primer cero de la función de la Figura es

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} \rho' = 1,22\pi \Rightarrow \rho' = 1,22 \frac{\lambda}{2a} f' \quad (15.31)$$

En campo lejano se observa un círculo rodeado de anillos, en vez de un sólo punto según la óptica Geométrica. Esto hace disminuir el poder resolutivo de un instrumento óptico, definido como la capacidad de distinguir objetos próximos.

PODER RESOLUTIVO DE LOS INSTRUMENTOS ÓPTICOS

La difracción limita la capacidad de los instrumentos ópticos de formar buenas imágenes. Para analizar esta capacidad de formación de imágenes, consideremos un par de puntos muy alejados y un sistema formador de la imagen que representaremos por una lente delgada convergente, Figura 15.16.

Éste es un problema de difracción de Fraunhofer pues cualquier sistema óptico tiene un tamaño finito y constituye un diafragma para la luz. La luz proveniente

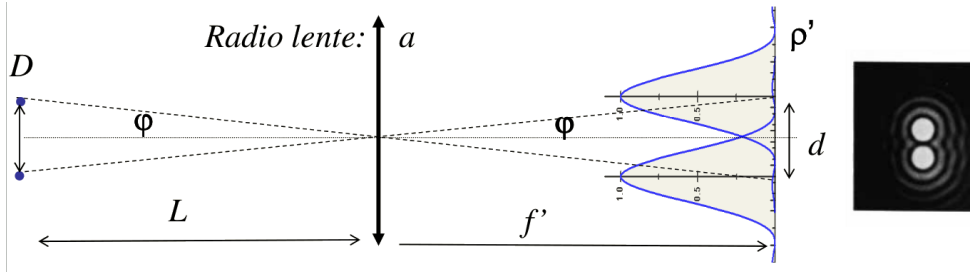


Figura 15.16: Poder resolutivo de una lente. Llamaremos D la distancia mutua de los objetos puntuales, L a su distancia al instrumento, f' a la focal del sistema y d a la distancia entre las dos imágenes formadas.

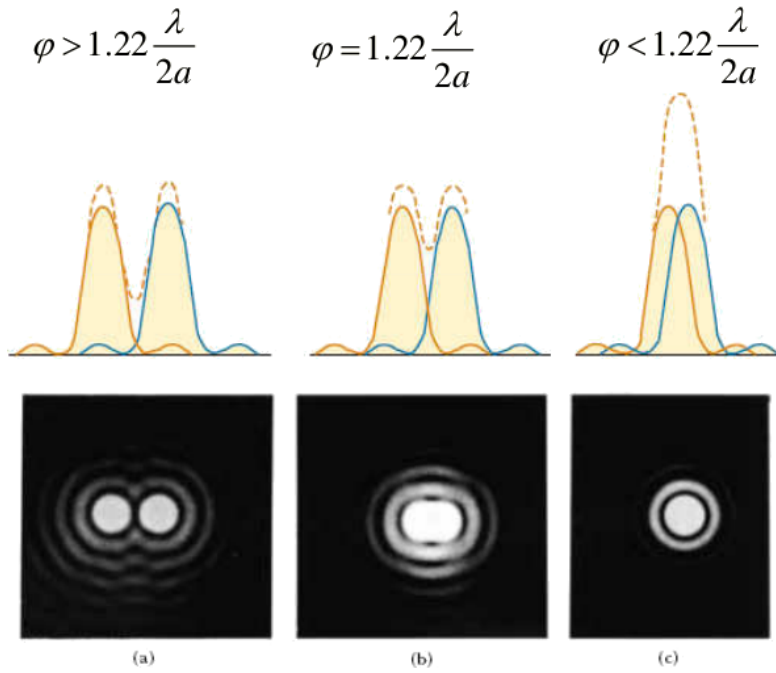


Figura 15.17: Criterio de Rayleigh de resolución de dos objetos lejanos. a) objetos resueltos, b) en el límite, c) objetos no resueltos.

de ambos objetos llegará a la abertura circular en forma de onda plana. Cada onda plana se difractará y en el plano focal se formarán dos manchas de difracción.

Si las dos manchas-imagen solapan, hay una cierta pérdida de información, pues sólo seríamos capaces de ver una imagen de dos objetos, Figura 15.17. El criterio es que las imágenes están resueltas si distan entre sí más que el tamaño de la mancha central de difracción

$$d \geq r', \quad (15.32)$$

y no lo estarán en otro caso. Dicho de otro modo

$$d \geq 1,22 \frac{\lambda}{2a} f', \quad (15.33)$$

o bien (por trigonometría),

$$\varphi = \frac{d}{2f'} = \frac{D}{2L}, \quad (15.34)$$

resolución de un
instrumento

por lo que

$$\boxed{\frac{D}{L} \geq 1,22 \frac{\lambda}{2a}}. \quad (15.35)$$

Éste es un criterio de resolución *angular*. Sólo depende de la longitud de onda y del tamaño de la abertura. Pero no depende de la focal: no aumentamos el poder resolutivo con un instrumento que aumente más. Esto significa que para mejorar el poder resolutivo debemos aumentar el tamaño de las lentes o utilizar longitudes de onda menores.

El poder resolutivo de un instrumento es, pues, su capacidad de distinguir objetos lejanos. Para un instrumento compuesto hay que considerar esto de modo relativo, pues el primer diafragma destruirá las ondas planas y habrá que hacer cálculos extra para los siguientes.

CONCLUSIONES

- La difracción limita el poder resolutivo de los instrumentos ópticos. En lugar de la distribución geométrica de intensidades, se produce un emborronamiento. El criterio de Rayleigh nos permite determinar cuándo un instrumento formador de imágenes permite separar dos objetos lejanos.

Parte V

COHERENCIA

COHERENCIA

Las ondas electromagnéticas están producidas por la combinación de multitud de ondas emitidas por átomos sujeto a continuas excitaciones. Es por ello que el sencillo concepto de onda plana u onda esférica no suele ser el adecuado para casos reales. Se introduce así la idea de una onda real como una onda parcialmente aleatoria en el tiempo y el espacio cuyo tratamiento requerirá de herramientas de origen estadístico. Surge entonces el concepto de coherencia espacial y temporal. Se analizarán las principales definiciones que permiten describir este tipo de ondas así como su propagación. Se estudiará también el efecto de la coherencia en las interferencias y la difracción.

Índice

16.1	Coherencia en campos ópticos	224
16.1.1	Coherencia y distribución espectral	225
16.2	Efecto de la coherencia en la interferencia	226
16.2.1	Visibilidad de las interferencias con luz parcialmente coherente	228
16.3	Efecto de la coherencia en la difracción	228
16.3.1	Tipos de fuentes	230
16.3.2	Difracción con una fuente espacialmente coherente	230
16.3.3	Difracción con fuente espacialmente incoherente: teorema de Van Cittert-Zernike	231
16.3.4	Difracción con fuente parcialmente coherente	232
16.3.5	Ejemplo: doble rendija de Young con fuente de tamaño finito	232
16.3.6	Coherencia de un haz reflejado por una superficie rugosa	234

OBJETIVOS

- Comprender que los campos electromagnéticos reales presentan fluctuaciones espacio-temporales de origen estadístico.
- Grado de coherencia y relación con la distribución espacial. Tiempo de coherencia y relación con la anchura espectral.
- Desarrollar modelos de estudio de la propagación de ondas con coherencia parcial.
- Aplicar conceptos de coherencia a las interferencias y la difracción.

REFERENCIAS GENERALES:

- Goodman J.W. "Statistical optics", Wiley-Interscience (1985).
- Ogilvy J.A. "Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces" Adam Hilger (1991).
- Mandel L., Wolf E. "Optical coherence and quantum optics", Cambridge University Press (1995).

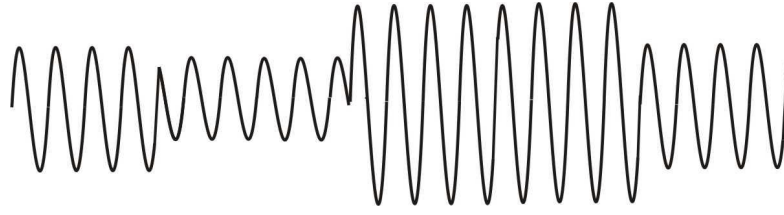


Figura 16.1: Ejemplo de onda con fluctuaciones aleatorias en la amplitud. Se producen saltos que no se pueden prever.

COHERENCIA EN CAMPOS ÓPTICOS

Hasta ahora, los fenómenos ópticos estudiados se han tratado con ondas ideales de las cuales se conoce su comportamiento completo. Así, cuando hablamos de una onda armónica plana, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}$, se asume que todos los parámetros son constantes y conocidos. Sin embargo, esto no es así. La luz esta formada por emisiones de múltiples átomos y, en la mayoría de los casos, dichas emisiones están desincronizadas. En el caso más común de emisión espontánea¹, los saltos entre niveles son completamente aleatorios y, por ello, también lo son los saltos de fase. Por ello, la luz tiene una cierta componente aleatoria. Esta aleatoriedad puede afectar a cualquiera de los parámetros que caracterizan la luz, como la amplitud, la fase o el estado de polarización, Figura 16.1. Por ello, es necesario utilizar conceptos estadísticos para analizar el comportamiento de la luz que presenta una cierta aleatoriedad. También analizaremos cómo afectan estas propiedades estadísticas de la luz en los fenómenos ópticos, como la interferencia y la difracción.

Inevitablemente $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ es una variable aleatoria. Es por ello necesario realizar algún tipo de análisis estadístico, basado en promedios temporales y espaciales, de forma análoga a los promedios en la respuesta de los detectores, capítulo 2. Este promedio no se puede realizar sobre el campo, puesto que para la práctica totalidad de las fuentes comunes $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Al igual que con el vector de Poynting, los parámetros medibles y de interés suelen ser los segundos momentos. En este sentido se define coherencia como el promedio en un punto del espacio o en el tiempo entre dos campos diferentes, $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$. La coherencia mutua

$$\Gamma_{12}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

mide el grado en el que dos campos eléctricos se parecen entre sí, es decir, si están correlacionados. Si la fuente es estacionaria los promedios estadísticos no dependen exactamente de t_1 y t_2 sino de la diferencia entre los tiempos. Entonces, la coherencia mutua resulta

$$\Gamma_{12}(\mathbf{r}, \tau) = \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t - t_1) \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}, t - t_2) \rangle. \quad (16.1)$$

Para medir la correlación entre los campos, se suele normalizar este parámetro. De esta forma se define grado de coherencia como

$$\mu = \frac{|\langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}, t) \rangle|}{\sqrt{\langle |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle} \sqrt{\langle |\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle}} = \frac{|\Gamma_{12}(\mathbf{r}, t)|}{\sqrt{I_1(\mathbf{r}, t) I_2(\mathbf{r}, t)}}. \quad (16.2)$$

De esta forma $\mu \in (0, 1)$. Cuando el grado de coherencia es máximo, $\mu = 1$, el grado de correlación entre campos es máximo, mientras que cuando el grado de

¹ http://es.wikipedia.org/wiki/Emisi3n_espont3nea

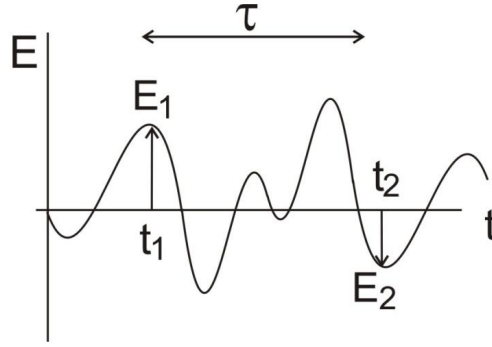


Figura 16.2: En una onda estacionaria, las propiedades estadísticas dependen de $\tau = t_2 - t_1$.

coherencia es mínimo, $\mu = 0$, las propiedades estadísticas de los dos campos son completamente diferentes.

Cuando medimos la coherencia entre dos puntos diferentes, $E_1(\mathbf{r}_1, t)$ y $E_2(\mathbf{r}_2, t)$ se denomina coherencia espacial, mientras que si medimos la coherencia entre dos tiempos diferentes $E_1(\mathbf{r}, t_1)$ y $E_2(\mathbf{r}, t_2)$ se denomina coherencia temporal.

Coherencia y distribución espectral

Supongamos que tenemos una onda y medimos el campo cada una de ellas en un tiempo distinto²

$$\begin{aligned} E_1(t_1) &= \int E_{0,\omega} e^{-i\omega t_1} d\omega, \\ E_2(t_2) &= \int E_{0,\omega} e^{-i\omega t_2} d\omega, \end{aligned}$$

donde asumimos que las amplitudes de cada una de las frecuencias es una variable aleatoria. Veamos cuál es el grado de correlación entre los campos

$$\langle E_1(t_1) E_2^*(t_2) \rangle = \iint \langle E_{0,\omega_1} E_{0,\omega_2}^* \rangle e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (16.3)$$

Para calcular esta integral vamos a considerar, en primer lugar que la onda es estacionaria. Esto significa que depende de $t_2 - t_1$. También, vamos a considerar que la correlación entre las amplitudes de frecuencias distintas es nula. Esto significa que

$$\langle E_{0,\omega_1} E_{0,\omega_2}^* \rangle = \langle |E_{0,\omega_1}|^2 \rangle \delta(\omega_2 - \omega_1). \quad (16.4)$$

Esto nos permite eliminar una integral, de forma que resulta

$$\langle E_1(t_1) E_2^*(t_2) \rangle = \int \langle |E_{0,\omega}|^2 \rangle e^{-i\omega(t_2 - t_1)} d\omega, \quad (16.5)$$

donde hemos cambiado la variable de integración a ω . Definiendo $\tau = t_2 - t_1$ y considerando que $\langle |E_{0,\omega}|^2 \rangle = I(\omega)$ resulta que

$$\mu(\tau) \propto \int I(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = TF[I(\omega)]. \quad (16.6)$$

² eliminamos la dependencia espacial, para simplificar.

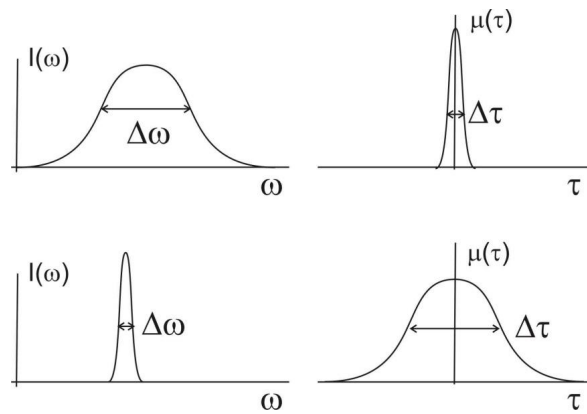


Figura 16.3: Cuando la anchura espectral es grande, el grado de coherencia es pequeño, y viceversa. en esta gráfica $\Delta\omega$ es la anchura espectral y $\Delta\tau$ es el tiempo de coherencia.

Coherence length

Light source	Wavelength	Coherence length
HeNe singemode	633 nm	100 m
HeNe	multimode	30 cm
Argon ion	488/515 nm	20 mm
Dye, not tuned	multimode	0.2 mm
Dye, tuned using a wedge	multimode	1.4 mm
GaAlAs, singemode	670-905 nm	3 m
Laserdiode	Multimode	0.8 mm
Sodium lamp	2 lines @ 589 nm	0.6 mm
Sun light	500 nm	1 μm

Figura 16.4: Longitudes de coherencia en algunas fuentes.

Esta ecuación, que se define como el teorema de Wiener-Khintchine, nos dice que el grado de coherencia temporal de un haz de luz (de una fuente luminosa) se puede calcular como la transformada de Fourier del espectro luminoso.

Como hemos visto en el tema de difracción, sabemos entonces, que cuando la anchura espectral de la fuente es grande, el grado de coherencia es pequeño, y viceversa, Figura 16.3. Definimos el parámetro $\Delta\tau$ como el tiempo de coherencia de la fuente. Mide el tiempo que una onda es coherente consigo mismo. También definimos la longitud de coherencia, $l_c = c\Delta\tau$, como la distancia en la cual el haz luminoso se mantiene coherente. En la Figura 16.4 se muestra la longitud de coherencia para algunas fuentes. Cuanto más monocromática es la fuente, mayor longitud de coherencia.

EFFECTO DE LA COHERENCIA EN LA INTERFERENCIA

La longitud de coherencia es un parámetro de gran importancia en las fuentes de iluminación, pues el fenómeno de la interferencia es muy sensible a la coherencia. Para verlo, supongamos el interferómetro de lámina planoparalela, Figura 16.5a. Veremos en primer lugar el proceso de interferencias para un pulso de luz, Figura 16.5b. Debido a que uno de los caminos ópticos recorre mas distancia que el otro, uno de los pulsos se retrasa respecto al otro. Esto hay que tenerlo en cuen-

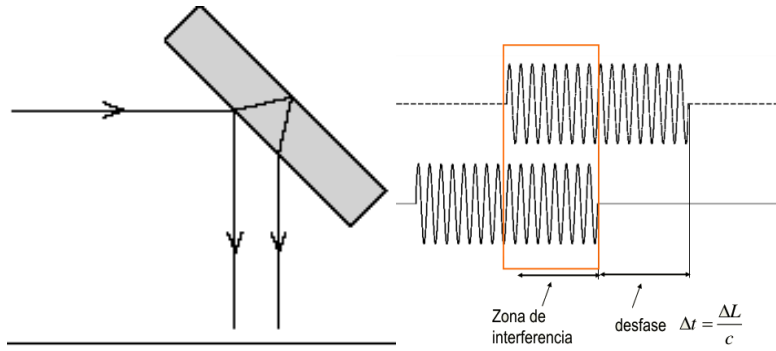


Figura 16.5: División de la onda procedente de una fuente. Una de las partes llega al punto de reunión en un tiempo Δt y otra en $\Delta t + \tau$. Cuando las interferencias se realizan entre dos pulsos, uno retrasado del otro, las interferencias disminuyen.

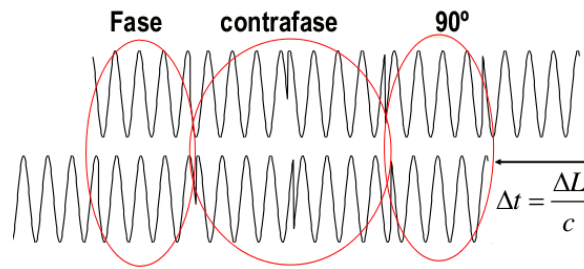


Figura 16.6: En una haz parcialmente coherente, unas zonas presentan interferencias constructivas y otras destructivas.

ta para medir la intensidad en el plano de observación. Solamente se producirá interferencias durante el tiempo en el cual las dos ondas solapen.

Si el lugar de un pulso tenemos una fuente parcialmente incoherente, la situación es más parecida a la Figura 16.6. Habrá zonas de interferencia constructiva y otras destructiva, por lo que en promedio, las interferencia se verá degradada respecto a una onda armónica. Según la definición de interferencias, 11.7,

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2 \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t - t_1) \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}, t - t_2) \rangle,$$

la distribución de intensidad queda entonces dependiente del parámetro de intensidad mutua $\Gamma_{12}(\tau)$,

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2\Gamma_{12}(\tau)\cos(\delta), \quad (16.7)$$

donde δ es el desfase entre las ondas. Más interesante, todavía es considerar el grado de coherencia (16.2) $\gamma(\tau) = \Gamma_{12}(\tau)/\sqrt{I_1 I_2}$, de forma que la distribución de interferencias resulta

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1 I_2}\gamma(\tau)\cos(\delta), \quad (16.8)$$

donde $\tau = (r_2 - r_1)/c$, r_1 y r_2 son los caminos ópticos recorridos por los haces. Esta ecuación nos indica que, cuando la coherencia no es perfecta, el proceso interferencial se ve perjudicado, pues el valor de γ está entre 0 y 1.

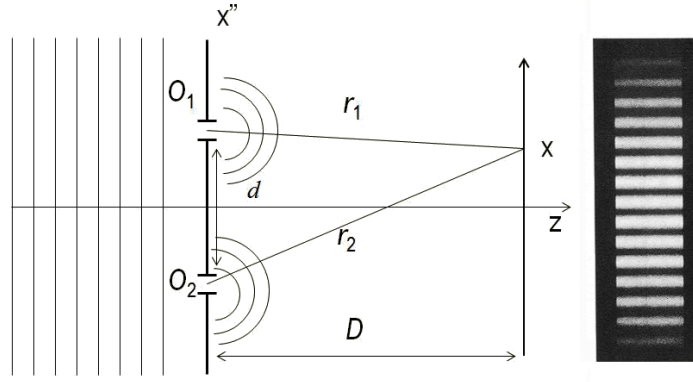


Figura 16.7: Coordenadas de los puntos de emisión y el punto de observación para el experimento de la doble rendija de Young.

Visibilidad de las interferencias con luz parcialmente coherente

Revisemos ahora el interferómetro de Young, Figura 16.7. Para producir las interferencias, hay dos ondas que recorren distintos caminos. Si la onda es completamente coherente, la distribución de intensidad es $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}]$. Ahora bien, cuando se considera la coherencia la distribución de intensidad queda

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma(\tau) \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}]. \quad (16.9)$$

Podemos utilizar la visibilidad para medir experimentalmente el grado de coherencia de la fuente, puesto que resulta

$$V = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{(I_1 + I_2)} \gamma_{12}(\tau), \quad (16.10)$$

y cuando las dos ondas tienen la misma intensidad $I_1 = I_2$,

$$V = \gamma_{12}(\tau), \quad (16.11)$$

la visibilidad de las interferencias mide directamente el grado de coherencia, Figura 16.8.

EFFECTO DE LA COHERENCIA EN LA DIFRACCIÓN

Vayamos ahora al caso de coherencia espacial, donde se considera la correlación de los campos en dos posiciones distintas del espacio, pero en el mismo tiempo. Para simplificar, consideremos la difracción en campo cercano de una estructura unidimensional, es decir, con simetría en el eje y y 14.12. Evaluemos el campo difractado en dos puntos distintos x_1 y x_2 ,

$$\mathbf{E}(x_n) = \sqrt{\frac{1}{i\lambda z}} e^{ikz} \int \mathbf{E}_0(\xi_1) e^{i\frac{k}{2z}(x_n - \xi_1)^2} d\xi_1, \quad (16.12)$$

donde $n = 1, 2$. La medida de la coherencia del campo eléctrico entre estos dos puntos x_1 y x_2 resulta

$$\langle \mathbf{E}(x_1) \mathbf{E}^*(x_2) \rangle = \frac{1}{\lambda z} \iint \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle e^{i\frac{k}{2z}(x_1 - \xi_1)^2} e^{-i\frac{k}{2z}(x_2 - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2. \quad (16.13)$$

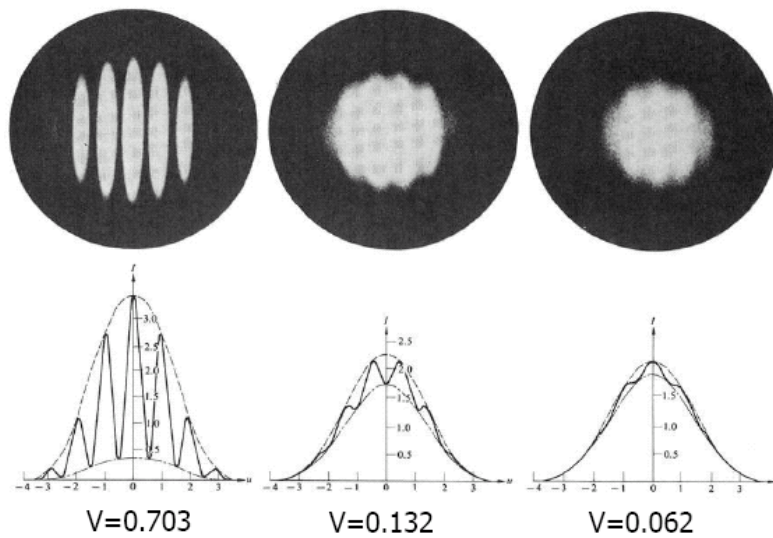


Figura 16.8: Tres casos de interferencias con coherencia parcial. A medida que disminuye el grado de coherencia, así lo hace la visibilidad. Se puede considerar la visibilidad una medida experimental del grado de coherencia.

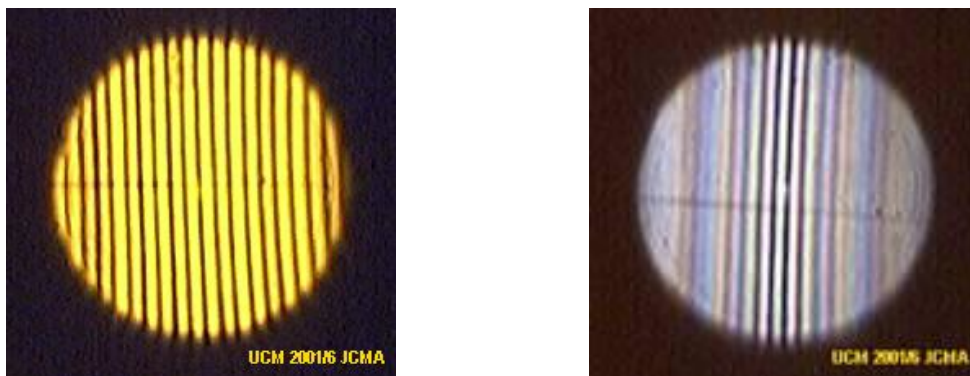


Figura 16.9: Interferencias cuando se utiliza una onda monocromática y policromática. en el caso de la luz policromática solo hay interferencias cuando las diferencias de camino óptico son pequeñas (en el centro).

Si definimos al parámetro de la correlación espacial, como intensidad mutua

$$J(x_1, x_2) = \langle \mathbf{E}(x_1) \mathbf{E}^*(x_2) \rangle, \quad (16.14)$$

tenemos la forma de cómo la intensidad mutua se propaga

$$J(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda z} \iint J_0(\xi_1, \xi_2) e^{i\frac{k}{2z}(x_1 - \xi_1)^2} e^{-i\frac{k}{2z}(x_2 - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2, \quad (16.15)$$

donde $J_0(\xi_1, \xi_2) = \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle$ y, recordando, las variables ξ_1, ξ_2 indican posiciones en la fuente y x_1, x_2 indican posiciones en el plano de observación.

Tipos de fuentes

Una forma de caracterizar las fuentes luminosas es a partir de su grado de intensidad mutua. En este sentido se definen las fuentes coherentes, incoherentes y parcialmente coherentes.

Las fuentes coherentes son aquellas en las cuales la intensidad mutua está completamente correlacionada entre sus puntos de emisión x_1 y x_2 . Entonces este tipo de fuentes no tiene variabilidad aleatoria y la intensidad mutua resulta

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle = \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2). \quad (16.16)$$

Esto quiere decir que el campo en ξ_1 está completamente correlacionado con el campo en ξ_2 .

En el otro extremo tenemos las fuentes incoherentes, donde los campos entre dos puntos, por muy cerca que estén entre sí, están completamente descorrelacionados. Entonces la intensidad mutua resulta

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle = \langle |\mathbf{E}_0(\xi_1)|^2 \rangle \delta(\xi_2 - \xi_1), \quad (16.17)$$

pues el campo siempre está correlacionado consigo mismo. Cuando $\xi_2 = \xi_1$ estamos en el mismo punto.

En el caso intermedio, el más común y el más complicado de estudiar, es cuando la fuente tiene una cierta coherencia entre puntos cercanos, pero está completamente descorrelacionada entre puntos lejanos. Entonces se dice que existe coherencia parcial y una posible forma de definición de la intensidad mutua resulta

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle = \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) f(\xi_2 - \xi_1), \quad (16.18)$$

donde $f(\xi_2 - \xi_1)$ es una función decreciente, por ejemplo

$$f(\xi_2 - \xi_1) = \exp \left[-(\xi_2 - \xi_1)^2 / 2T_0^2 \right].$$

El parámetro T_0 se denomina longitud de correlación

Difracción con una fuente espacialmente coherente

Veamos ahora el efecto de la coherencia espacial de la fuente en el proceso de propagación de la luz. Para ello utilizaremos 16.15 e incluiremos las definiciones que hemos desarrollado. La intensidad en el plano de observación se obtiene cuando miramos la intensidad mutua en el mismo punto

$$I(x_1) = J(x_1, x_1) = \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_1) \rangle = \langle |\mathbf{E}_0(\xi_1)|^2 \rangle. \quad (16.19)$$

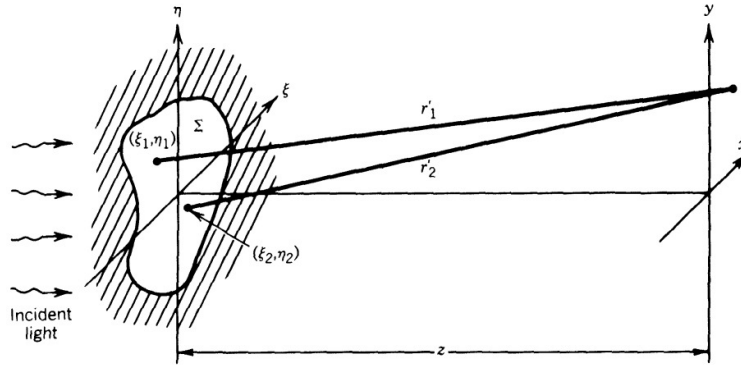


Figure 5-22. Geometry for diffraction calculation.

Figura 16.10: Esquema para calcular la propagación producida por una fuente parcialmente coherente.

El caso más sencillo es cuando la fuente es espacialmente coherente. Entonces no existe ninguna componente aleatoria. Por ello la integral doble es separable

$$J(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda z} \int \mathbf{E}_0(\xi_1) e^{i \frac{k}{2z}(x_1 - \xi_1)^2} d\xi_1 \int \mathbf{E}_0^*(\xi_2) e^{-i \frac{k}{2z}(x_2 - \xi_2)^2} d\xi_2. \quad (16.20)$$

Como la intensidad resulta $I(x_1) = J(x_1, x_1)$ tenemos que

$$I(x_1) = \mathbf{E}(x_1) \mathbf{E}^*(x_1) = |\mathbf{E}(x_1)|^2. \quad (16.21)$$

Este es el resultado que conocíamos, pues las fuentes completamente coherentes son las que hemos tratado hasta ahora.

Difracción con fuente espacialmente incoherente: teorema de Van Cittert-Zernike

Según la Figura 16.10, se puede calcular la difracción producida por un haz parcialmente coherente. Las fuentes más comunes, como las lámparas de incandescencia, fluorescencia, el sol, se asemejan más a fuentes espacialmente incoherentes, donde el campo electromagnético generado por un punto de la fuente ξ_1 no tiene nada que ver con el campo generado por otro punto diferente ξ_2 , $I_0(\xi_1, \xi_2) = \langle |\mathbf{E}_0(\xi_1)|^2 \rangle \delta(\xi_2 - \xi_1)$. Entonces, la intensidad mutua propagada resulta

$$J(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda z} \iint \langle |\mathbf{E}_0(\xi_1)|^2 \rangle \delta(\xi_2 - \xi_1) e^{i \frac{k}{2z}(x_1 - \xi_1)^2} e^{-i \frac{k}{2z}(x_2 - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2. \quad (16.22)$$

La función $\delta(\xi_2 - \xi_1)$ nos permite eliminar una de las integrales, pues solamente tiene un valor significativo cuando $\xi_2 = \xi_1$. Entonces la integral resulta

$$J(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda z} \int \langle |\mathbf{E}_0(\xi_1)|^2 \rangle e^{i \frac{k}{2z}(x_1 - \xi_1)^2} e^{-i \frac{k}{2z}(x_2 - \xi_1)^2} d\xi_1. \quad (16.23)$$

Puesto que $I_0(\xi_1) = \langle |\mathbf{E}_0(\xi_1)|^2 \rangle$ la integral resulta, una vez desarrollados los términos exponenciales

$$J(x_1, x_2) = \frac{e^{i \frac{k}{2z}(x_1^2 - x_2^2)}}{\lambda z} \int I_0(\xi_1) e^{i \frac{k}{z} \xi_1 (x_2 - x_1)} d\xi_1. \quad (16.24)$$

Este resultado se denomina Teorema de van Cittert-Zernike ³, pues nos indica que la intensidad mutua de una fuente incoherente se puede calcular como la transformada de Fourier de la intensidad (forma) de la fuente.

Ya hemos tratado problemas similares, por lo que tenemos conocimiento de las propiedades de la transformada de Fourier. Por ejemplo, para fuentes pequeñas y en planos de observación lejanos, la coherencia espacial, definida como $J(x_1, x_2)$ es alta, mientras que para fuentes de gran extensión y cercanas, la coherencia es baja.

Para calcular la propagación de la intensidad luminosa cuando la fuente es completamente incoherente se puede obtener a partir de (16.24), puesto que $I(x_1) = J(x_1, x_1)$,

$$I(x_1) = \int I_0(\xi_1) d\xi_1. \quad (16.25)$$

Esto es, para fuentes incoherentes la intensidad propagada se calcula como en la óptica geométrica, sumando intensidades de cada punto de la fuente, sin considerar las fases.

No obstante, según (16.24) el grado de coherencia del haz propagado crece al separarnos de la fuente. Esto es así, porque a medida que aumenta la distancia z , el factor $e^{i\frac{k}{2z}\xi_1(x_2-x_1)}$ se hace cada vez más pequeño y, como realmente es una transformada de Fourier, $J(x_1, x_2)$ se hace cada vez más grande.

Difracción con fuente parcialmente coherente

El caso más complejo resulta cuando la fuente es parcialmente coherente, $J_0(\xi_1, \xi_2) = \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle = \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) f(\xi_2 - \xi_1)$, donde $f(\xi_2 - \xi_1)$ es una función decreciente, por ejemplo $f(\xi_2 - \xi_1) = \exp[-(\xi_2 - \xi_1)^2 / 2T_0^2]$. Entonces la intensidad difractada resulta

$$I(x_1) = \frac{1}{\lambda z} \iint \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) e^{-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2T_0^2}} e^{i\frac{k}{2z}(x_1 - \xi_1)^2} e^{-i\frac{k}{2z}(x_1 - \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2. \quad (16.26)$$

El problema que presenta esta ecuación es que no se puede desacoplar. Es necesario hacer dos integrales y normalmente resulta bastante complicado.

Ejemplo: doble rendija de Young con fuente de tamaño finito

Veamos ahora un caso práctico. Para analizar la coherencia espacial consideraremos el esquema de la doble rendija de Young, Figura 16.11, con una fuente monocromática de tamaño S situada a una distancia A de la doble rendija. Entre dos puntos de la fuente no existe ningún tipo de coherencia espacial, por lo que para el cálculo de la distribución de intensidad en el plano de observación P , podemos asumir que será la suma de las intensidades de cada una de las fuentes puntuales dentro de la rendija S . Esta rendija actúa de fuente para iluminar el sistema de doble rendija. Asumiremos un punto x' sobre la fuente y un punto x sobre el plano de observación. Los caminos ópticos r_{A2} y r_{B2} ya los hemos calculado anteriormen-

³ http://en.wikipedia.org/wiki/Van_Cittert-Zernike_theorem

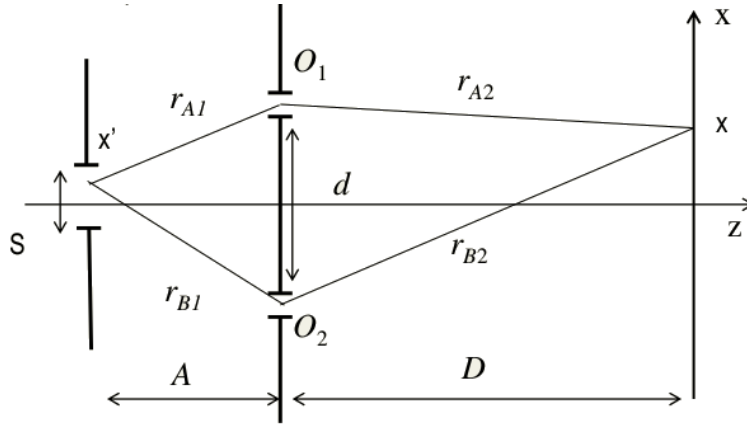


Figura 16.11: Esquema para analizar el tamaño finito de las fuentes en la Figura de difracción.

te en el tema de interferencias. El cálculo de r_{A1} y r_{B1} se calcula de forma muy similar, obteniéndose

$$\begin{aligned} r_{A1} &= \sqrt{A^2 + \left(x' - \frac{d}{2}\right)^2}, & r_{A2} &= \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \\ r_{B1} &= \sqrt{A^2 + \left(x' + \frac{d}{2}\right)^2}, & r_{B2} &= \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Realizando para r_{A1} y r_{B1} aproximaciones similares a las de D , $d \ll A$, $x' \ll A$, y quedándonos con la aproximación cuadrática en las cuatro raíces cuadradas tenemos que la diferencia de fase entre la onda que pasa por el agujero O_1 y el agujero O_2 resulta

$$L = (r_{A1} + r_{A2}) - (r_{B1} + r_{B2}) \approx d \left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{A} \right). \quad (16.28)$$

Por consiguiente, la distribución de intensidad para una fuente puntual situada en x' resulta ser

$$I_{x'} = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{A} \right) d \right] \right\} = 4I_0 \cos^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{A} \right) d \right]. \quad (16.29)$$

Esto significa que la distribución de intensidad para cada punto x' está desfasada respecto al caso de la fuente en $x' = 0$.

Para obtener la distribución de intensidad generada por toda la fuente S simplemente tenemos que sumar las intensidades en todas las posiciones x' , Figura 16.12, pues están completamente descorrelacionadas. Entonces

$$I(x) = \frac{1}{S} \int_{-S/2}^{S/2} I_{x'} dx' = I_0 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{D} d \right) \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{S}{A} d \right) \right\}. \quad (16.30)$$

Aunque la fuente sea completamente incoherente desde el punto de vista espacial, se producen interferencias, con contraste más reducido. Un parámetro muy importante en el caso de la coherencia espacial es la relación entre el tamaño de la fuente y la distancia a la doble rendija, S/A . Es aproximadamente el ángulo subtendido desde el centro de la doble rendija a la fuente. Cuanto menor sea este ángulo subtendido, mayor será la coherencia espacial.

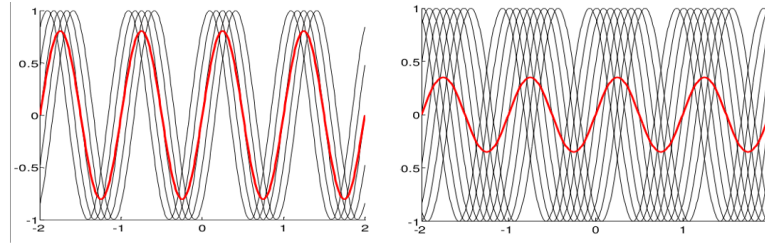


Figura 16.12: Reducción de la visibilidad debido al tamaño finito de la fuente. Para cada posición x' la posición de los máximos y mínimos es distinta. Se observa que la visibilidad de la interferencia disminuye con la anchura de la fuente.

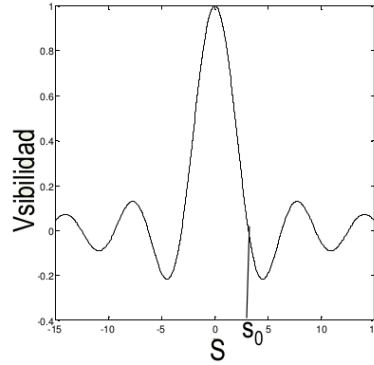


Figura 16.13: Reducción de la visibilidad debido al tamaño finito de la fuente.

Si calculamos la visibilidad para esta distribución de intensidad obtenemos

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \text{sinc} \left(\frac{\pi S}{\lambda A} d \right). \quad (16.31)$$

Esta gráfica de visibilidad se muestra en la Figura 16.13 en función del tamaño de la fuente.

Al aumentar el tamaño de la fuente la visibilidad de las franjas disminuye hasta alcanzar un nulo, para el tamaño

$$S_0 = \frac{A}{d} \lambda. \quad (16.32)$$

Coherencia de un haz reflejado por una superficie rugosa

La incoherencia de un haz no solamente se genera en la fuente, también se puede producir cuando la luz llega a superficies rugosas. La rugosidad la podemos definir como fluctuaciones aleatorias en la topografía, Figura 16.14. Supongamos, por ejemplo, el caso unidimensional donde la topografía de una superficie es aleatoria y está caracterizada por $h(\xi)$. Entonces la reflectancia de la superficie queda como $t(\xi) = \exp[-2ikh(\xi)]$. Si el haz de entrada es $\mathbf{E}_{inc}(\xi)$, el campo justo a la salida de la superficie resulta ser $\mathbf{E}_{out}(\xi) = t(\xi)\mathbf{E}_{inc}(\xi)$. Aunque el haz incidente no tenga un comportamiento estocástico, si la superficie es aleatoria, imprime esta aleatoriedad en el haz reflejado.

La aleatoriedad de la topografía afecta sustancialmente al comportamiento óptico de las superficies. El parámetro que caracteriza el comportamiento óptico de las superficies es que las variaciones aleatorias sean menores que produzcan desfases pequeños $\exp[-2ikh(\xi)] \approx 1$, es decir, $2kh(\xi) \ll 2\pi$ y por tanto $h(\xi) \ll \lambda$.

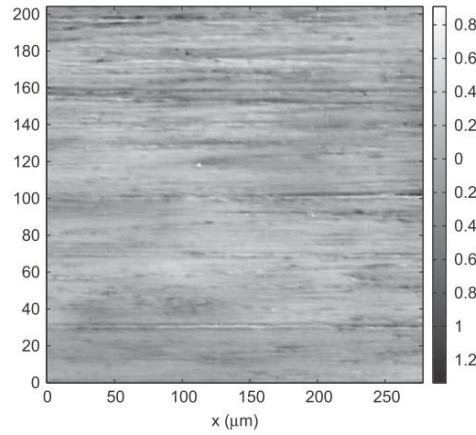


Figura 16.14: Ejemplo de superficie metálica con una cierta aleatoriedad en la topografía. La escala está en micras.

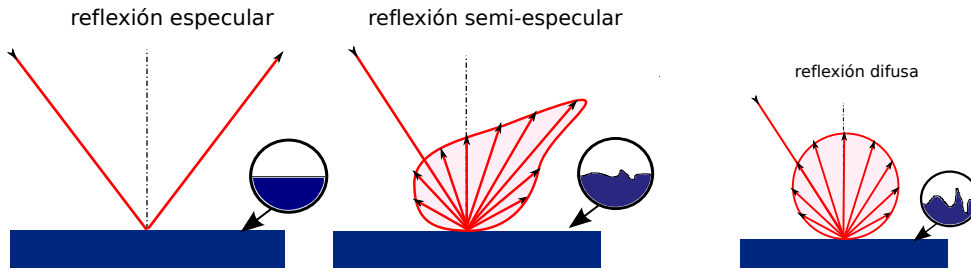


Figura 16.15: Reflexión especular por una superficie plana, semi-especular por una superficie con una cierta longitud de correlación y difusa, por una superficie muy rugosa.

Por ejemplo, un espejo de buena calidad tiene una topografía constante, con variaciones aleatorias (siempre las hay, aunque sean nanométricas) menores a una fracción de la longitud de onda, por ejemplo $\lambda/10$. Una pared, por contra, tiene una topografía aleatoria mucho mayor.

Para caracterizar el comportamiento óptico de la superficie aleatoria sería entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(x_1) \mathbf{E}^*(x_2) \rangle &= \frac{1}{\lambda z} \iint \langle \mathbf{E}_0(\xi_1) \mathbf{E}_0^*(\xi_2) \rangle e^{i\frac{k}{2z}(x_1-\xi_1)^2} e^{-i\frac{k}{2z}(x_2-\xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \frac{1}{\lambda z} \iint \mathbf{E}_{inc}(\xi_1) \mathbf{E}_{inc}^*(\xi_2) \langle t(\xi_1) t^*(\xi_2) \rangle e^{i\frac{k}{2z}(x_1-\xi_1)^2} e^{-i\frac{k}{2z}(x_2-\xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (16.33)$$

La aleatoriedad no está en la luz incidente, sino en la reflexión. El efecto de la rugosidad sobre la luz reflejada se muestra en la Figura 16.15. Cuando la superficie es plana, el haz reflejado se propaga únicamente en la dirección predicha por la ley de Snell, reflexión especular. Sin embargo, a medida de aumenta la rugosidad de la superficie se propaga más luz en otras direcciones hasta el límite de reflexión difusa, donde la luz se refleja por igual en todas las direcciones.

CONCLUSIONES

- El campo eléctrico de la luz es una variable aleatoria.

- La coherencia se refiere a la correlación/ dependencia estadística entre dos ondas.
- La coherencia de una fuente viene determinada por su espectro y tamaño a través de la transformada de Fourier.
- Cuando las condiciones de monocromaticidad, polarización y coherencia se cumplen parcialmente la visibilidad de las franjas disminuye. La visibilidad de las franjas disminuye también cuando aumenta el tamaño de la fuente y cuando se utiliza luz policromática.
- Las superficies rugosas aumentan el grado de incoherencia del haz incidente.

Parte VI

APLICACIONES

INTERFERENCIAS POR DIVISIÓN DE LA AMPLITUD

Se estudiará el interferómetro de Michelson como paradigma de interferómetro por división del frente de ondas. También se verán otros tipos de interferómetros relacionados y se verán algunas aplicaciones prácticas, enfatizando el grado de resolución que nos permiten estos dispositivos¹.

Índice

17.1	Introducción	239
17.2	Interferómetro de lámina planoparalela	240
17.3	El interferómetro de Michelson	242
17.3.1	Fuentes extensas	245
17.4	Otros tipos de interferómetros por divisor de amplitud	247

OBJETIVOS

- Comprender las interferencias por división de la amplitud así como los distintos interferómetros basados en ellas: la lámina plano-paralela, el interferómetro de Michelson y las aplicaciones que tiene.
- Saber el funcionamiento de otros tipos de interferómetros, basados en los principios de división de la amplitud.
- Conocer algunas aplicaciones tecnológicas en las cuales se utilizan los interferómetros.

INTRODUCCIÓN

Si hacemos incidir una onda sobre una discontinuidad de índice sabemos que se va a dividir en dos ondas, una reflejada y otra transmitida. Esas ondas son coherentes entre sí y pueden interferir. Para obtener la interferencia no hace falta más que recombinarlas. Éste es el principio de los interferómetros por división de amplitud. Una pieza clave de estos dispositivos es el *divisor de haz*, Figura 17.1.

Una forma de dividir el haz en dos haces de aproximadamente la misma intensidad es con una lámina planoparalela, que es simplemente una placa fina de vidrio donde las superficies son muy paralelas y tienen buena calidad óptica (variaciones en el espesor menores a una fracción de la longitud de onda), Figura 17.1a. Para un vidrio típico, con índice de refracción $n = 1,5$, la intensidad de cada uno de los haces es aproximadamente igual, alrededor de un 4 % del haz incidente. Los dos haces salen superpuestos si son anchos. El haz transmitido tiene aproximadamente un 92 % del haz incidente.

Una forma más efectiva es utilizar un divisor de haz, Figura 17.1b. El objetivo del divisor de haz es tener dos haces con la misma intensidad. Para ello, se utiliza una lámina de vidrio con una lámina muy delgada de un medio metálico ($\simeq nm$). Se prescinde de considerar la reflexión en el vidrio, pues es comparativamente

¹ tipos de interferómetros: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_types_of_interferometers
curso online (breve) sobre interferómetros http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M02_C05/co/OPI_ang_M02_C05_web.html

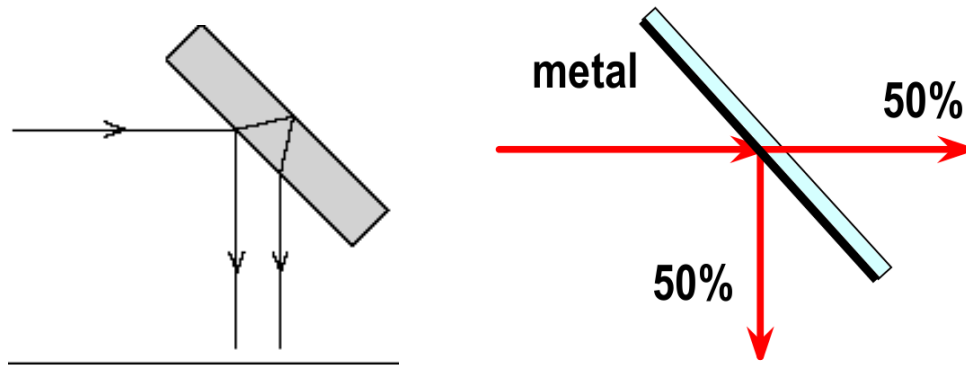


Figura 17.1: Lámina planoparalela y divisor de haz al 50 %.

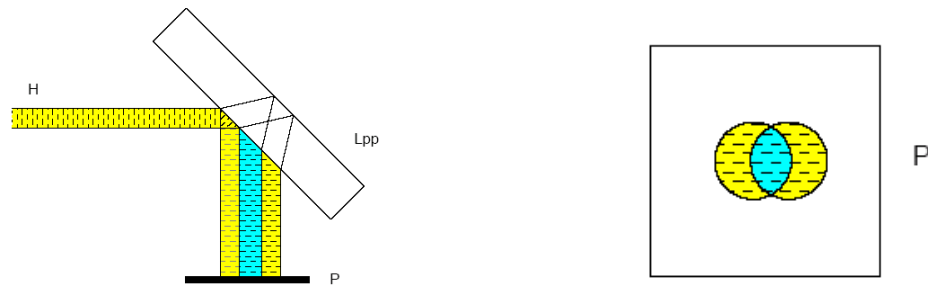


Figura 17.2: Interferencias con lámina plano-paralela y zona de interferencia. La zona de interferencia será mayor cuanto mayor es la relación diámetro del haz respecto al espesor de la lámina.

muy débil. En caso necesario se puede incluir una lámina antirreflectante sobre la segunda cara.

INTERFERÓMETRO DE LÁMINA PLANOPARALELA

En primer lugar estudiaremos el interferómetro de lámina planoparalela, también denominado shearing interferometer². Un esquema del funcionamiento se muestra en la Figura 17.2. La luz se refleja sobre las dos intercaras del vidrio (aire-vidrio y vidrio-aire). La relación de intensidades reflejadas es aproximadamente la misma. El haz tiene distinto camino óptico y por ello la zona reflejada no solapa perfectamente sino que tiene una cierta zona de interferencias. Cuanto menor sea el espesor, menor será la diferencia de caminos ópticos y mejor el fenómeno interferencial. Tiene la ventaja de que el haz transmitido tiene una buena cantidad de luz, aproximadamente de un 90 %, por lo que la lámina planoparalela se puede introducir como sistema de verificación de la calidad del haz sin interferir apenas en el funcionamiento del sistema. Un ejemplo que muestra la capacidad de la lámina planoparalela como interferómetro es un montaje para la determinación del plano focal de una lente, Figura 17.3. Un haz procedente de, por ejemplo, un diodo láser (DL) es colimado mediante una lente L_1 . Esta luz atraviesa la lámina planoparalela y es focalizado por la lente L_2 , de la que se quiere saber la posición del plano focal imagen. Para ello se ubica un espejo y se hace reflejar el haz. El haz de vuelta llega de nuevo a la lámina plano paralela L_{pp} y es reflejado en cada una de las láminas. Se ubica una cámara que detecta las interferencias. Hay que tener cuidado con el

² http://en.wikipedia.org/wiki/Shearing_interferometer

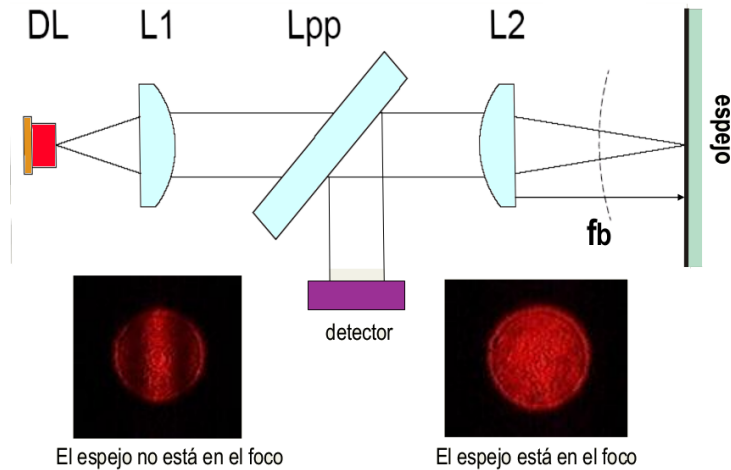


Figura 17.3: Montaje con lámina planoparalela para la determinación de la distancia focal de una lente.

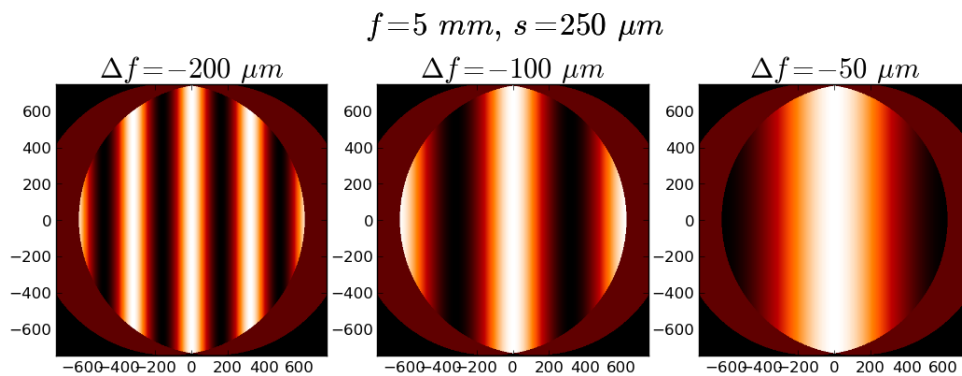


Figura 17.4: Interferencias con lámina plano-paralela y zona de interferencia. La zona de interferencia será mayor cuanto mayor es la relación diámetro del haz respecto al espesor de la lámina.

haz reflejado que vuelve a L1 y DL, pues este haz suele inestabilizar el láser y a veces inutilizarlo. Es necesario ubicar una cierta óptica de polarización que impida la generación de este haz.

Cuando el espejo no está exactamente en el plano focal los dos haces tienen una cierta curvatura que se refleja como interferencias en forma de franjas. Sin embargo, cuando el espejo está en el plano focal, el haz reflejado es completamente paralelo y no se produce interferencia, al ser los dos haces planos en la misma dirección. Una imagen experimental de esta situación también se puede ver en la Figura 17.3. Esta técnica tiene bastante resolución y se pueden obtener franjas con solamente diferencias de $10 \mu m$. Este montaje está caracterizado por su sencillez (solamente una lámina planoparalela), robustez (no necesita de partes móviles) y de su coste, de muy pocos euros. En la Figura 17.4 se muestra una simulación de la intensidad obtenida por el sistema para distintos desenfoques.

Este tipo de interferómetro también permite visualizar las posibles aberraciones que tiene el haz³.

³ Un ejemplo de de realización se encuentra en http://www.thorlabs.de/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=2970&pn=S1500.

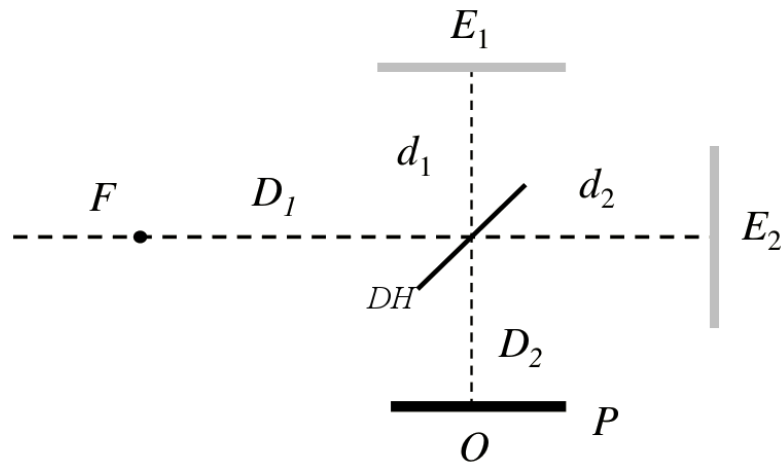


Figura 17.5: Dispositivo interferencial de Michelson.

EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON

El interferómetro de Michelson⁴ es el más significativo como interferómetro de división de amplitud. Fue ideado en el s. XIX para intentar detectar el “éter” a partir de la modificación de la velocidad de la luz por el movimiento de la tierra. El “fracaso” en el experimento fue vital para desechar el éter y de considerar que la velocidad de la luz era constante independientemente del estado de movimiento de la fuente (teoría de la relatividad). No obstante este tipo de interferómetro tuvo enormes repercusiones y Michelson obtuvo el premio Nobel en 1907⁵

El principio de funcionamiento del interferómetro se basa en un divisor de haz, DH, Figura 17.5. Si el haz incide a 45° respecto a la normal, el haz transmitido sigue la misma dirección y el reflejado tiene 90° respecto al primero. Para recombinar ambos haces se utilizan dos espejos E_1 y E_2 que vuelven a enviar la luz de vuelta al divisor de haz. Parte de la luz vuelve a la fuente, mientras que la otra mitad sigue una dirección perpendicular hasta la pantalla. En ambas zonas (fuente y plano de observación) se tiene la recombinación de las dos ondas, aunque preferiblemente se observan en la pantalla.

Este dispositivo suele utilizar una *lámina compensadora* C para que la luz que viaja por el brazo E_1 (que pasa tres veces por el vidrio) no tenga un exceso de camino óptico respecto a la que pasa por el brazo horizontal (que sólo pasa una vez por el vidrio). La citada lámina es en todo equivalente a la que sirve de apoyo a la capa de metal. Esto hace que podamos eliminar definitivamente el vidrio del modelo de funcionamiento.

Los caminos que recorren los haces son, no obstante, diferentes, dependiendo de la distancia de lámina planoparalela a los espejos. El haz que viaja por el espejo E_1 tiene un camino óptico $s_1 = D_1 + 2d_1 + D_2$, mientras que el que viaja por E_2 tiene un camino óptico $s_2 = D_1 + 2d_2 + D_2$.

De forma más sencilla y esquemática podemos tratar con un esquema de fuentes virtuales en las que, si los espejos están perfectamente perpendiculares al haz, dichas fuentes están alineadas con la pantalla de observación, Figura 17.7. Cada uno de los espejos genera una fuente virtual F_1 y F_2 separadas una distancia $2(d_1 - d_2)$ entre sí.

⁴ info sobre Michelson: http://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Abraham_Michelson
info sobre el interferómetro: http://en.wikipedia.org/wiki/Michelson_interferometer

⁵ premio Nobel de Michelson en 1907 «por sus instrumentos ópticos de precisión y por las investigaciones espectroscópicas y metrológicas que fueron llevadas a cabo gracias a su ayuda».

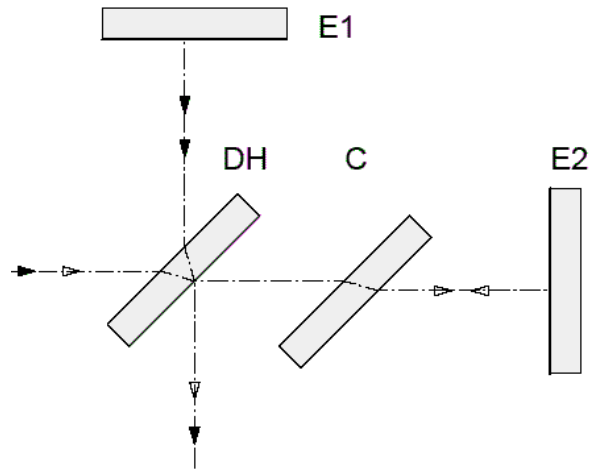


Figura 17.6: Dispositivo interferencial de Michelson.

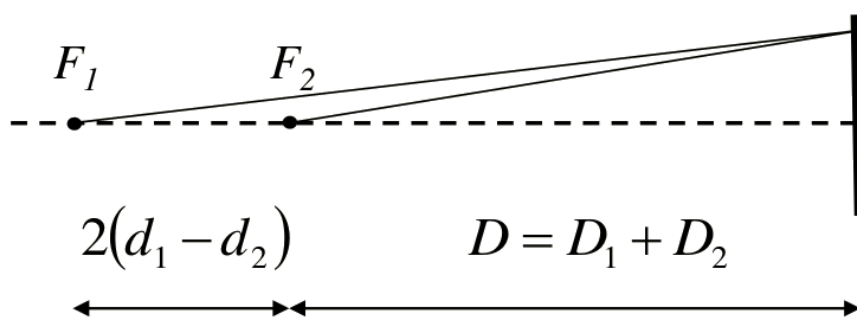


Figura 17.7: Dispositivo interferencial de Michelson.

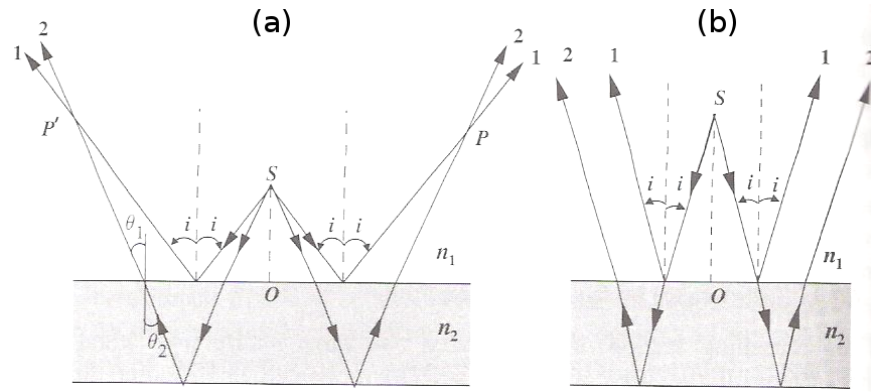


Figura 17.8: Ejemplo de interferómetro donde tenemos (a) franjas localizadas y (b) franjas en el infinito (o en el plano focal de una lente).

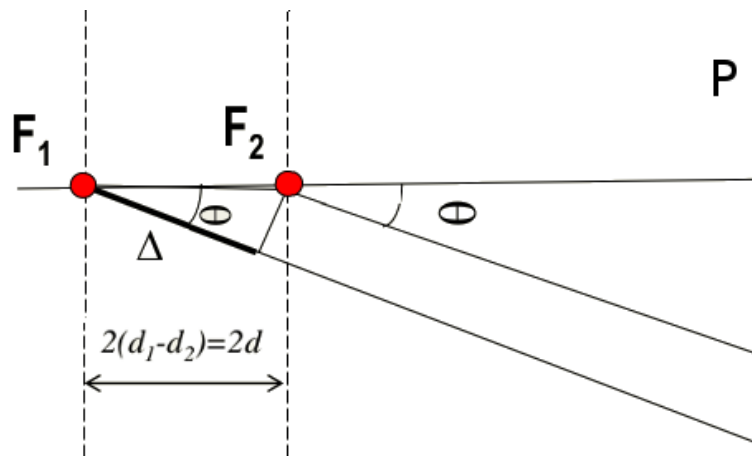


Figura 17.9: Dispositivo interferencial de Michelson, con franja en infinito.

Al ser fuentes puntuales podemos suponer que emiten ondas esféricas, y sólo queda resolver el problema del interferómetro de Young con una geometría diferente, donde las fuentes, en lugar de estar en el mismo plano, una está detrás de la otra.

Franjas localizadas y franjas en el infinito

En un interferómetro hemos asumido que estábamos observando en un cierto plano. A esta configuración se la denomina *franjas localizadas*, puesto que si se pone una pantalla, las interferencias se observan en dicho plano, Figura 17.8a. No obstante, las franjas también se pueden encontrar cuando los haces de salida son paralelos entre sí, denominada *franjas en el infinito*, Figura 17.8b. En este caso los rayos que interfieren salen paralelos. Por ello interfieren a una distancia muy lejana o en el plano focal de una lente. En lugar del esquema de la Figura 17.7, utilizaremos el de fuente en infinito, Figura 17.9.

La diferencia de caminos ópticos, es Δ , que por análisis trigonométrico resulta ser $\Delta = 2(d_2 - d_1)\cos\theta$.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2k d \cos\theta), \quad (17.1)$$

donde $d = d_2 - d_1$ es la diferencia de separación entre espejos y δ es un desfase que da cuenta de las reflexiones que se producen.

Si el divisor de haz es al 50 % se cumple $I_1 = I_2 = I_0$, entonces la intensidad resulta

$$I = 2I_0[1 + \cos(2kdcos\theta)] = 4I_0 \cos^2(kdcos\theta). \quad (17.2)$$

En la Figura 17.10 se muestra la distribución de intensidad en el interferómetro de Michelson con franja en el infinito. Aparecen una serie de anillos concéntricos. Cada anillo corresponde a un orden interferencial, de forma que los máximos de interferencia corresponden con

$$2ndcos\theta_m = m\lambda, \quad (17.3)$$

donde m es el orden interferencial. A medida que aumenta la separación entre espejos d aumenta el orden del anillo central, por lo que los anillos van “saliendo” del centro hacia afuera. En el centro de la Figura interferencial, $\theta = 0$, obtenemos la siguiente ecuación

$$2nd = m\lambda, \quad (17.4)$$

que nos indica que la aparición o desaparición de un anillo interferencial se corresponde con un desplazamiento relativo entre espejos de

$$d = \frac{m\lambda}{2n} - \frac{(m-1)\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{2n}. \quad (17.5)$$

Aquí radica la verdadera importancia de este interferómetro de Michelson. Es capaz de detectar desplazamientos entre espejos que en el vacío es la mitad de la longitud de onda. Para el visible estamos hablando de desplazamientos de 250 nm.

El radio de los anillos depende del orden interferencial. El ángulo se puede calcular usando (17.3)

$$cos\theta_m = m \frac{\lambda}{2nd}. \quad (17.6)$$

Para una distancia d determinada no existen todos los órdenes de difracción, sino solamente aquellos que cumplan $0 < cos\theta_m < 1$. Esto significa que los órdenes válidos para una cierta distancia son $m_{min} = 2nd/\lambda$ y $m_{max} = 0$. El orden $m = 0$ está siempre en $\theta_0 = \pi/2$ excepto cuando $d = 0$. En este caso las dos fuentes virtuales coinciden en posición y tenemos un campo constante.

La separación entre dos de los órdenes nos da una idea de la separación entre los espejos. La anchura angular será

$$cos\theta_m - cos\theta_{m-1} = m \frac{\lambda}{2nd} - (m-1) \frac{\lambda}{2nd} = \frac{\lambda}{2nd}. \quad (17.7)$$

Por consiguiente

$$d = 2n(cos\theta_m - cos\theta_{m-1})/\lambda, \quad (17.8)$$

lo que nos indica que cuanto más pequeña es la separación entre anillos, mayor es la distancia entre espejos.

Fuentes extensas

El problema de tener una fuente puntual es su poca energía. Con el objeto de aumentar la cantidad de luz del interferómetro de Michelson se puede utilizar una fuente extensa en lugar de una fuente puntual. Un esquema se muestra en la Figura 17.11.

Cada punto de la fuente genera un par de fuentes virtuales, y por ello, un sistema de anillos. Sin embargo, los infinitos sistemas de anillos, no coinciden entre sí: el

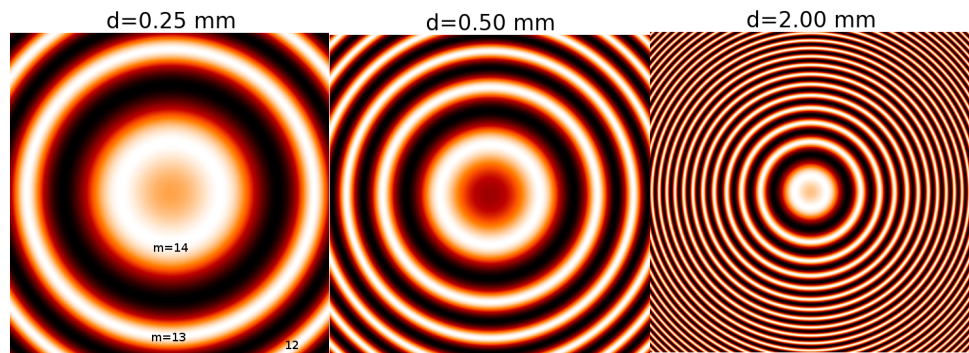


Figura 17.10: Distribución de intensidad producida por el interferómetro de Michelson a distintas distancias entre los brazos.

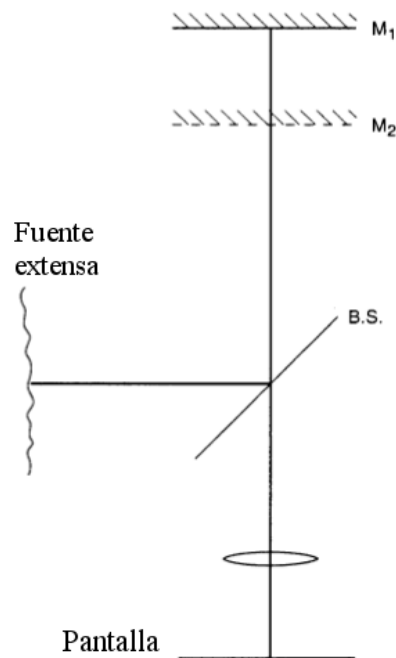


Figura 17.11: Esquema de interferómetro de Michelson con fuente extensa.

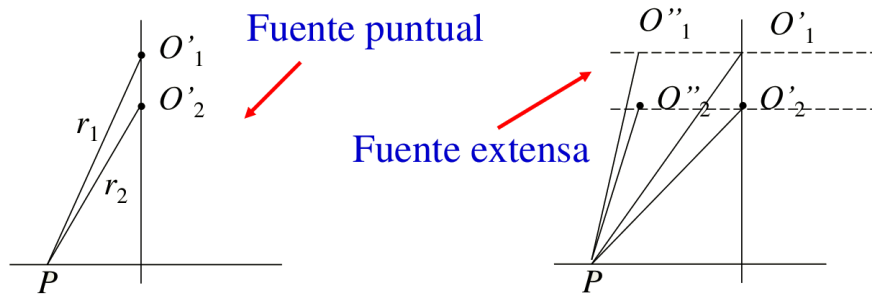


Figura 17.12: Interferencias con una fuente puntual y una fuente extensa.

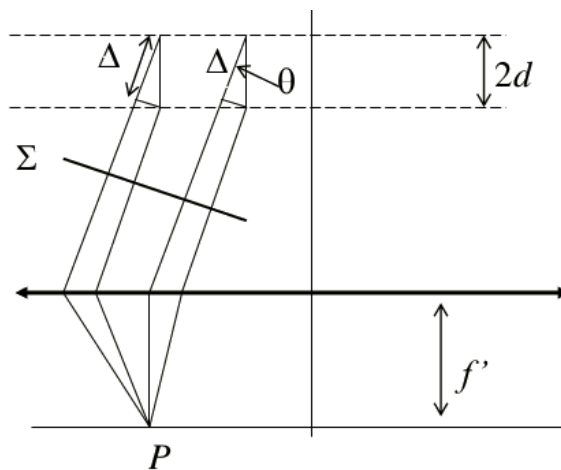


Figura 17.13: Interferencias producidas por una fuente extensa en el infinito.

camino óptico $r_2 - r_1$ para una pareja y $\hat{r}_2 - \hat{r}_1$ para otra son distintos. Eso destruye la interferencia, puesto que habrá una mezcla espacial de las figuras interferenciales. La pérdida de visibilidad será tanto más notable cuanto más extensa sea la fuente.

Esto se resuelve cuando se observan las interferencias en el infinito, Figura 17.13. Si situamos la pantalla a una distancia infinita las diferencias de fase para cada una de las parejas de imágenes son las mismas. La diferencia de camino óptico de Σ a P es el mismo para todas las parejas de puntos ondas. Dicha diferencia de fase es $\delta = 2kd\cos\theta$. Por ello, no se observa una pérdida de visibilidad cuando tenemos una fuente extensa, si la observación es en el infinito. Esta distancia infinita la podemos conseguir interponiendo una lente convergente y observando en su plano focal imagen.

OTROS TIPOS DE INTERFERÓMETROS POR DIVISOR DE AMPLITUD

Veamos algunos otros ejemplos de interferómetros por divisor de amplitud que se utilizan de forma específica para la medida de forma precisa de algún parámetro.

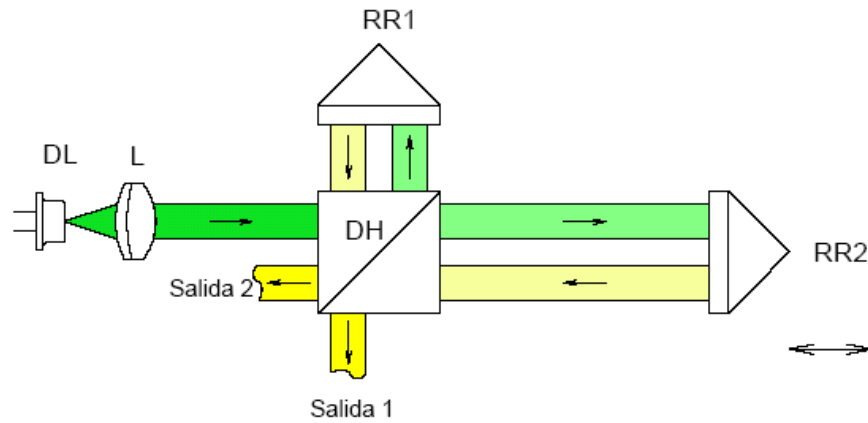


Figura 17.14: Interferómetro de Twyman-Green. Es muy similar al de Michelson, pero la fuente está colimada. Al moverse los espejos (en este caso divisor de haz que son más estables) en lugar de anillos se obtiene una variación de intensidad uniforme. Este esquema se suele utilizar para la medida de desplazamientos.

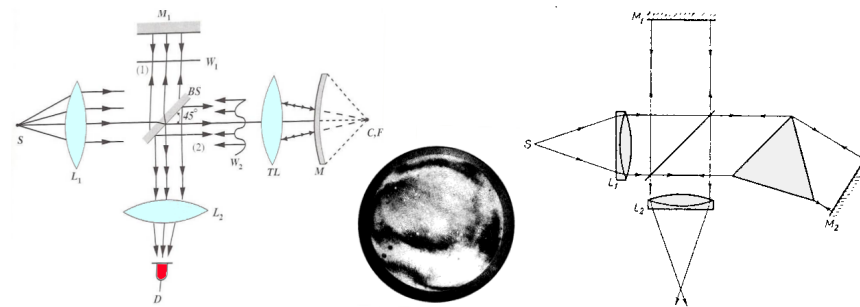


Figura 17.15: El interferómetro de Twyman-Green también se puede utilizar para la medida de la calidad de elementos ópticos como lentes o prismas.

Interferómetro de Twyman-Green

El interferómetro de Twyman-Green⁶ es una variante del interferómetro de Michelson con fuente de luz colimada. En este caso, el haz incidente no es una fuente esférica, sino una onda plana. Entonces no aparece un sistema de anillos, sino que al desplazar uno de los espejos respecto al otro, aparecen fluctuaciones constantes de intensidad. Esta configuración es más útil para medir desplazamientos pues es solamente necesario 1 fotodetector (2 si quisiéramos medir el sentido de desplazamiento), Figura 17.14.

Otra configuración en la que se utiliza el interferómetro de Twyman-Green es para la medida de la calidad de elementos ópticos como espejos, lentes, prismas, etc. Para ello se necesita un elemento de referencia, de gran calidad óptica, que haga que el haz a la vuelta sea plano si este elemento óptico tiene las propiedades adecuadas. Si tiene algún tipo de aberración, el frente de ondas no será plano sino que tendrá una cierta distorsión. Esta distorsión puede ser medida con gran precisión (menor a $\lambda/10$) con este sistema, Figura 17.15.

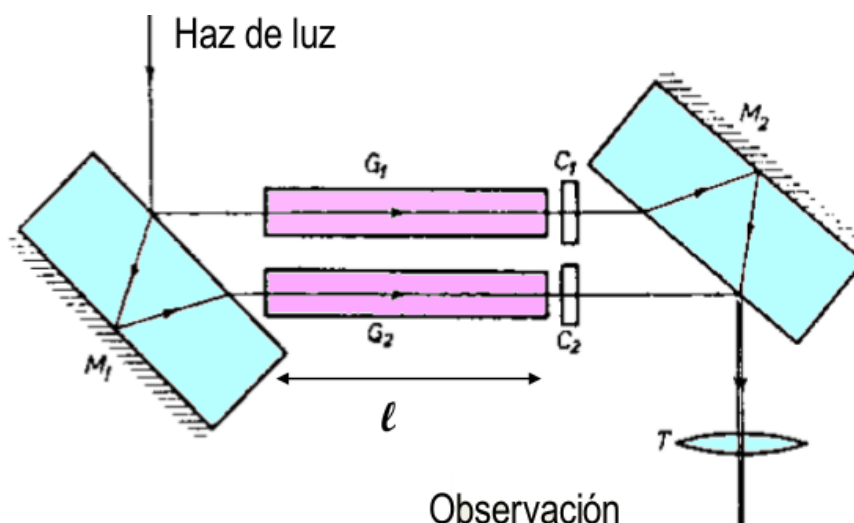


Figura 17.16: Interferómetro de Jamin. Se puede utilizar la medida del índice de refracción en gases y líquidos.

Interferómetro de Jamin

El interferómetro de Jamin, Figura 17.16, se utiliza para la medida de índices de refracción de gases y líquidos. Las dos probetas deben tener las mismas condiciones. A una de ellas se le hace el vacío y a la otra se la llena de gas o líquido. La diferencia de camino óptico es $\Delta = l(n_2 - n_1)$ donde l es el tamaño de la probeta y n_1 y n_2 son los índices de refracción. Este tipo de interferómetro tiene el problema de la separación entre haces, que requiere unos vidrios de gran grosor. No obstante tiene la ventaja de su gran precisión al medir índices de refracción. Cuanto mayor sea la longitud l de la probeta mayor será la precisión en la medida del índice de refracción.

Interferómetro de Mach-Zehnder

Una mejora respecto al interferómetro de Jamin es el interferómetro de Mach-Zehnder⁷, donde las dos zonas de trabajo están más separadas. Además, es bastante sencillo de alinear moviendo los espejos. No obstante, los caminos ópticos que llevan los dos haces pueden ser bastante distintos, por lo que es necesario tener una buena coherencia temporal en el haz. Este tipo de interferómetros se puede utilizar para detectar variaciones térmicas, como en una llama de combustión, Figura 17.17.

Interferómetro de Sagnac

Simplemente modificando la posición de un espejo cambiamos completamente las características del interferómetro. En el interferómetro de Sagnac los caminos ópticos de los dos haces son idénticos, pero cada uno viaja en una dirección, Figura 17.18. Si se produce una rotación del sistema uno de los caminos ópticos se verá acortado y el otro alargado. De esta forma este interferómetro sirve para medir rotaciones. Tiene una gran sensibilidad y se ha utilizado en aeronáutica. Una versión más moderna está realizada con fibra óptica, y no con espejos.

⁶ info sobre el interferómetro de Twyman-Green http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M02_C05/co/Contenu_31.html

⁷ info sobre el interferómetro Mach-Zehnder http://en.wikipedia.org/wiki/Mach-Zehnder_interferometer

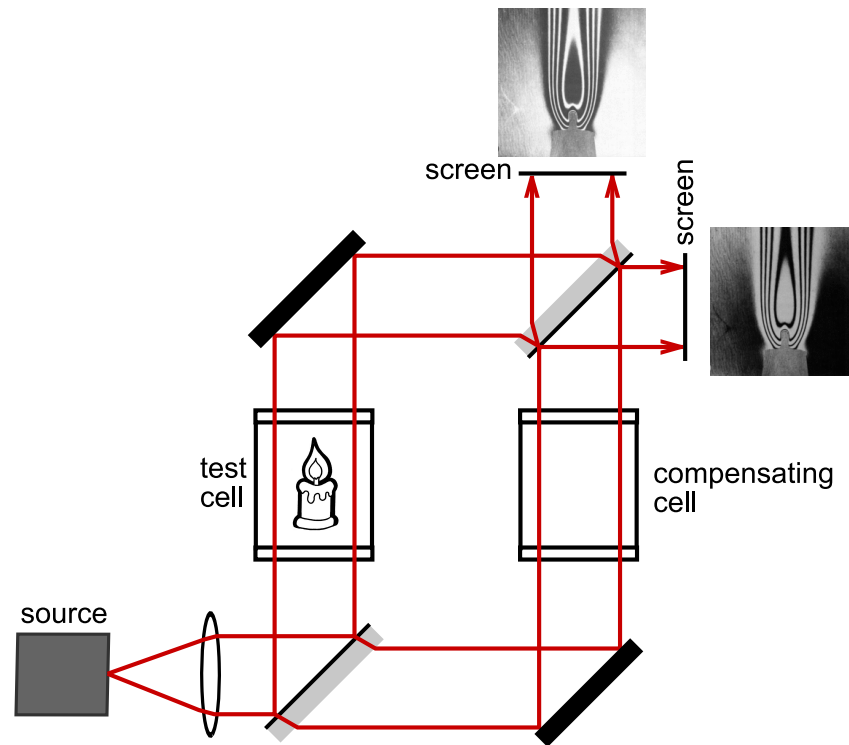


Figura 17.17: Interferómetro de Mach-Zehnder.

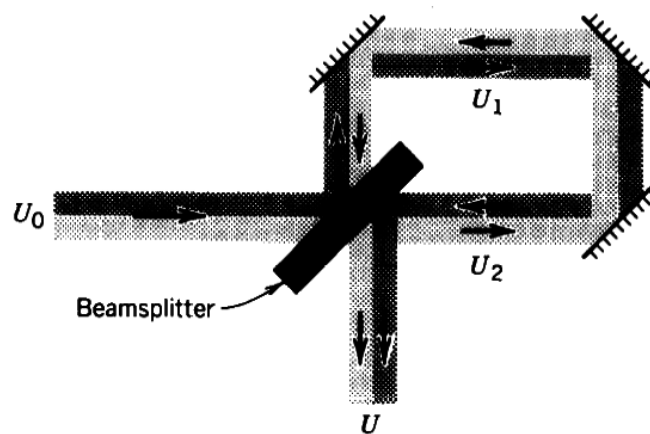


Figura 17.18: Interferómetro de Sagnac.

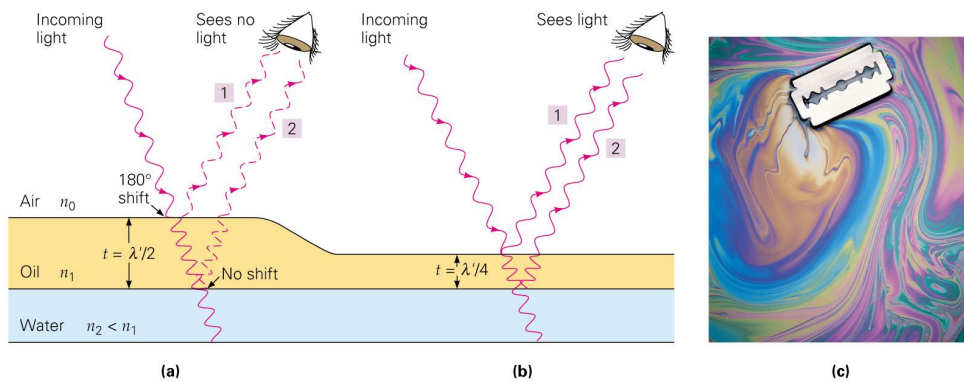


Figura 17.19: Efecto interferencial en las láminas de aceite sobre agua. Las pequeñas variaciones de espesor producen las interferencias entre la luz reflejada por las dos intercaras del aceite (aire-aceite y aceite-agua).

Pompas de jabón

Las interferencias por división de amplitud producen los colores en las pompas de jabón o de las láminas de aceite estiradas por la lluvia. En ambos casos, interfieren las dos ondas reflejadas, una en cada cara de la pompa o lámina. El espesor de las capas de material en ambos casos es muy fina, suficiente para el efecto interferencial con luz blanca, Figura 17.19.

CONCLUSIONES

- El interferómetro de Michelson tiene gran interés por su eficiencia y por poder utilizarse en numerosas aplicaciones metrológicas, como la medida de desplazamientos.

INTERFERENCIAS POR HACES MÚLTIPLES

Se estudiarán las interferencias múltiples como método de mejorar algunas aplicaciones interferométricas. Se analizarán con detalle el interferómetro de Fabry-Perot.

Índice

18.1	Introducción	253
18.1.1	Interferómetro de Fabry-Perot	254
18.1.2	Fineza y visibilidad	257
18.1.3	Poder resolutivo	258

OBJETIVOS

- Saber el funcionamiento de otros tipos de interferómetros, basados en interferencias múltiples.
- Conocer algunas aplicaciones tecnológicas de este tipo de interferómetros.

INTRODUCCIÓN

En la interferometría por división de amplitud se obtienen dos haces como consecuencia del doble proceso reflexión-refracción. Sin embargo, también se pueden producir interferencias cuando el frente de ondas emitido por una fuente luminosa se divide en múltiples haces que luego se superponen. Esto se puede conseguir incidiendo sobre una lámina de espesor d , como se muestra en la Figura 18.1. Un haz incide sobre una lámina de vidrio y el haz es reflejado y transmitido. La parte transmitida vuelve a ser reflejada y transmitida, y así sucesivamente. Al final, salen varias ondas en reflexión y varias en transmisión, todas paralelas entre sí.

Si la lámina es de vidrio la reflexión es pequeña y sólo la 1ª onda transmitida es suficientemente intensa, lo se traduce en una visibilidad muy pobre.

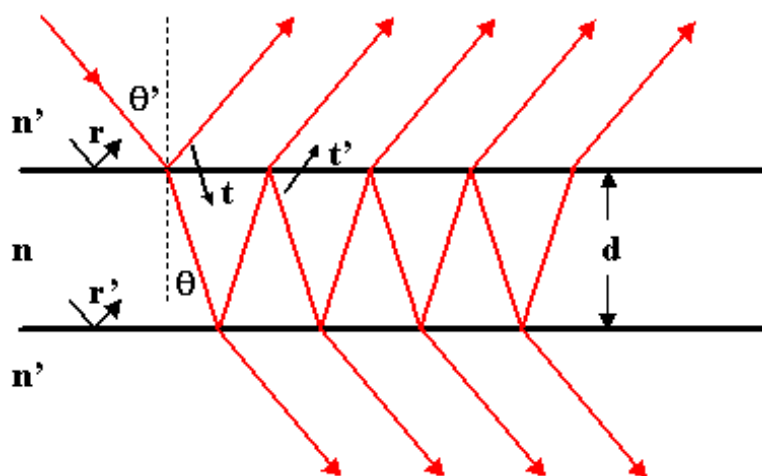


Figura 18.1: Interferencias en una lámina delgada de índice n .

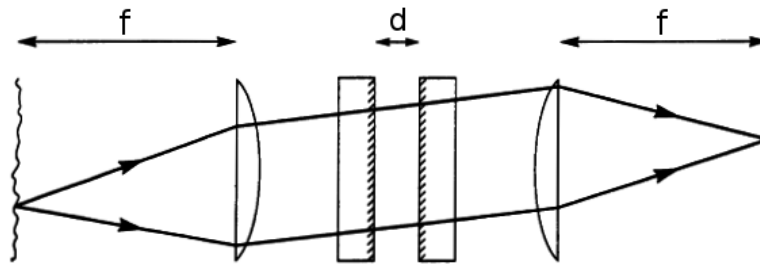


Figura 18.2: Esquema de un interferómetro de Fabry-Perot.

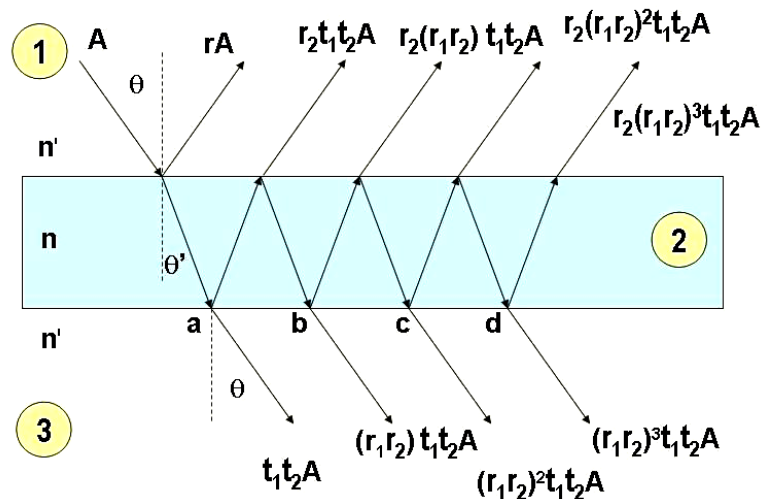


Figura 18.3: Esquema de cálculo de la transmisión y reflexión en el interferómetro Fabry-Perot.

Interferómetro de Fabry-Perot

Una solución es incorporar una fina capa de un metal para aumentar la reflexión¹. Sea el dispositivo esquematizado en la Figura 18.2. Disponemos dos espejos enfrentados entre sí, de material metálico y muy delgados para que haya suficiente reflexión. Habitualmente estas láminas van montadas sobre láminas de vidrio. Como las reflexiones en el vidrio son pequeñas, en lo que sigue sólo consideraremos las láminas metálicas.

Las amplitudes reflejadas y transmitidas por el sistema se pueden calcular de forma sencilla mediante un método iterativo, como se muestran en la Figura 18.3. Sea un sistema formado por dos intercara cuyos coeficientes de reflexión son r_1 y r_2 y los coeficientes de transmisión t_1 y t_2 , respectivamente para la primera y segunda intercara. La separación entre las intercara es d . El índice de refracción del medio interno es n y del medio externo a las intercara es n' .

Sea una onda armónica plana de amplitud A que incide con un ángulo θ respecto a la normal de las caras. Calculemos en primer lugar las amplitudes de todas las ondas reflejadas y transmitidas y posteriormente calcularemos sus fases. El haz incidente se divide en dos, uno reflejado de amplitud rA que sale del sistema por la cara de reflexión y otro transmitido de amplitud t_1A . Este segundo haz llega

¹ info sobre el interferómetro de Fabry-Perot http://en.wikipedia.org/wiki/Fabry-Pérot_interferometer

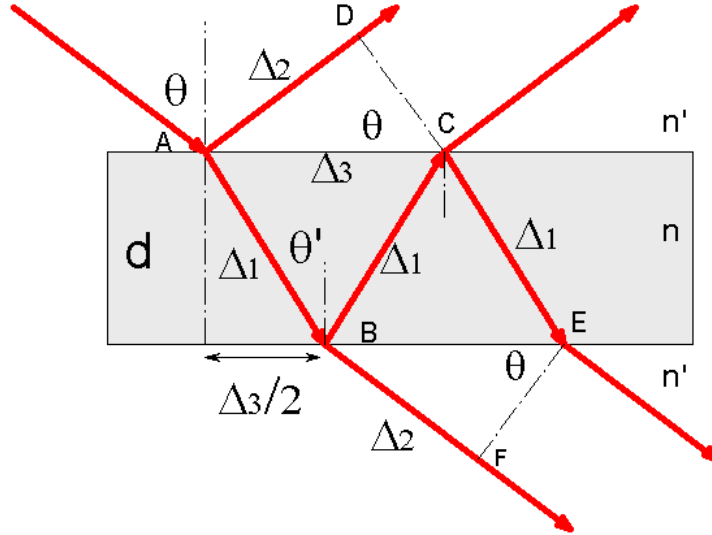


Figura 18.4: Esquema del camino óptico de las ondas en el interferómetro de Fabry-Perot.

la la segunda intercara y allí se transmite y refleja con amplitud $t_1 t_2 \mathbf{A}$ y $t_1 r_2 \mathbf{A}$, respectivamente. El haz transmitido sale del sistema por la cara de transmisión y el haz reflejado vuelve de nuevo a la primera intercara que, de nuevo, es parcialmente reflejado y transmitido. este cálculo se realiza sucesivamente resultando que las amplitudes de las ondas reflejadas son

$$r\mathbf{A}, \quad r_2 t_1 t_2 \mathbf{A}, \quad r_2 t_1 t_2 (r_1 r_2) \mathbf{A}, \quad r_2 t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 \mathbf{A}, \quad \dots, \quad r_2 t_1 t_2 (r_1 r_2)^l \mathbf{A}, \quad (18.1)$$

mientras que los haces transmitidos tienen una amplitud

$$t_1 t_2 \mathbf{A}, \quad t_1 t_2 (r_1 r_2) \mathbf{A}, \quad t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 \mathbf{A}, \quad \dots, \quad t_1 t_2 (r_1 r_2)^l \mathbf{A}. \quad (18.2)$$

El campo transmitido total será la suma de todas las ondas, cada una de ellas con su amplitud y fase. En general para la onda transmitida $l + 1$

$$\mathbf{A}_{l+1} = t_1 t_2 (r_1 r_2)^l e^{il\phi} \mathbf{A}, \quad (18.3)$$

por tanto el campo total transmitido resulta

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^l = \frac{1}{1-x}$$

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A} \sum_{l=0}^{\infty} t_1 t_2 (r_1 r_2)^l e^{il\phi} = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \mathbf{A}. \quad (18.4)$$

Calculemos ahora las fases correspondientes a cada una de estas ondas. Para ello utilizaremos el esquema de la Figura 18.4. Calcularemos la diferencia de fases para los rayos reflejados y transmitidos. Para la parte reflejada, comenzaremos el análisis de caminos ópticos en A, y llegaremos hasta una fase perpendicular al haz de salida, que en el caso de reflexión es CD. El camino óptico del haz que llega a C, dentro del interferómetro es $2n\Delta_1$, mientras que el camino óptico del rayo que llega a D, que viaja por el medio de índice de refracción n' es Δ_2 . Por consiguiente, la diferencia de fase para el haz reflejado resulta

$$\phi_r = \frac{2\pi}{\lambda} (2n\Delta_1 - n'\Delta_2). \quad (18.5)$$

Para realizar el cálculo de la diferencia de fases en los rayos transmitidos empezamos el análisis en B y llegamos a los puntos EF . De la misma forma que el análisis anterior, obtenemos que la diferencias de fase para los haces transmitidos resulta igual

$$\phi_t = \frac{2\pi}{\lambda} (2n\Delta_1 - n'\Delta_2). \quad (18.6)$$

Ahora tenemos que calcular los caminos Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , que se obtienen mediante análisis trigonométrico. Utilizando los parámetros del esquema se obtiene que estos parámetros resultan

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{d}{\cos \theta'}, \\ \Delta_2 &= \Delta_3 \sin \theta', \\ \Delta_3 &= 2\Delta_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (18.7)$$

y por consiguiente

$$\Delta_2 = 2 \frac{d}{\cos \theta} \sin \theta \sin \theta'. \quad (18.8)$$

Como en cualquiera de las superficies paralelas a los espejos, dentro y fuera se deben verificar las condiciones de contorno. Esto implica que se debe cumplir la ley de Snell para todas las intercaras

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (18.9)$$

De esta forma podemos eliminar la dependencia con $\sin \theta'$, por lo que Δ_2 resulta

$$\Delta_2 = 2 \frac{d}{\cos \theta} \frac{n}{n'} \sin^2 \theta, \quad (18.10)$$

y la diferencia de fase, al sustituir Δ_1 y Δ_2 vale

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n d \cos \theta, \quad (18.11)$$

expresada en términos del índice de refracción del interferómetro, el ángulo de incidencia y la distancia entre los espejos. Obsérvese que es la misma expresión que la del interferómetro de Michelson.

Si lo que incide sobre el interferómetro es una onda plana de amplitud A , a la salida tendremos una única onda plana de amplitud A' . Si lo que incide sobre el interferómetro es luz proveniente de una fuente puntual monocromática (emisor de una infinidad de rayos en distintas direcciones), muchos rayos de la fuente producirán puntos distintos sobre el plano focal imagen, lo que dará lugar a una determinada distribución de intensidad. Geométricamente, la intensidad sólo depende del ángulo θ . Es decir, que todo tiene simetría bajo rotaciones en torno a la normal a los espejos. Podemos esperar pues que se visualice un sistema de anillos centrado en el foco imagen del sistema, F' .

Si la fuente es extensa, en campo lejano obtendremos la misma figura de interferencia por cada punto emisor de la fuente, por lo que la visibilidad se mantiene, aumentando la intensidad de las franjas.

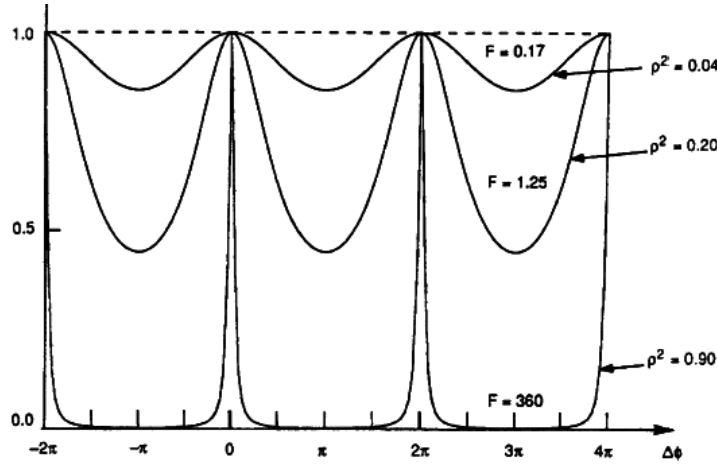


Figura 18.5: Función de transmitancia $\mathcal{T}(\varphi)$ para diversos valores de Fineza F . El parámetro φ depende del ángulo θ de observación.

Fineza y visibilidad

Para calcular la intensidad de la onda reflejada tenemos que calcular $I' = |\mathbf{A}_T|^2 = \mathbf{A}_T \mathbf{A}_T^*$. Para hacerlo escribimos el número complejo $r_1 r_2 = |r_1 r_2| e^{i2\delta}$. La transmitancia es la relación entre la intensidad de salida respecto la de entrada, que resulta

$$\mathcal{T}(\varphi) = \frac{I'}{I} = \frac{|\mathbf{A}_T|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{\mathcal{T}_{max}}{1 + F \sin^2 \varphi}, \quad (18.12)$$

donde $\varphi = \phi/2 + \delta = 2\pi n d \cos \theta / \lambda + \delta$ es la fase, idéntica al caso del interferómetro de Michelson, excepto por el desfase producido por las intercarras. El parámetro φ es variable, pues depende del ángulo θ de observación. El parámetro $\mathcal{T}_{max} = |t_1 t_2|^2 / (1 - |r_1 r_2|)^2$ es el valor máximo de la transmitancia y

$$F = \left(\frac{2\sqrt{|r_1 r_2|}}{1 - |r_1 r_2|} \right)^2,$$

es la Fineza, que únicamente depende de los coeficientes de reflexión.

La transmitancia depende del ángulo de incidencia, según se muestra en la Figura 18.5 para diversos valores de fineza. Los máximos corresponden a $\sin \varphi = 0$, lo que conduce a

$$\frac{2\pi}{\lambda} n d \cos \theta + \delta = M\pi. \quad (18.13)$$

donde M es entero. En este caso la intensidad máxima resulta $I'_{max} = \mathcal{T}_{max} I$. Los mínimos se producirán cuando $\sin \varphi = \pm 1$ o

$$\frac{2\pi}{\lambda} n d \cos \theta + \delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (18.14)$$

La intensidad en los mínimos vale $I'_{min} = \mathcal{T}_{min} I$, donde $\mathcal{T}_{min} = \mathcal{T}_{max} / (1 + F)$. Los mínimos no son nulos y la visibilidad resulta

$$V = \frac{I'_{max} - I'_{min}}{I'_{max} + I'_{min}} = \frac{F}{2 + F} = \frac{2|r_1 r_2|}{1 + |r_1 r_2|^2}. \quad (18.15)$$

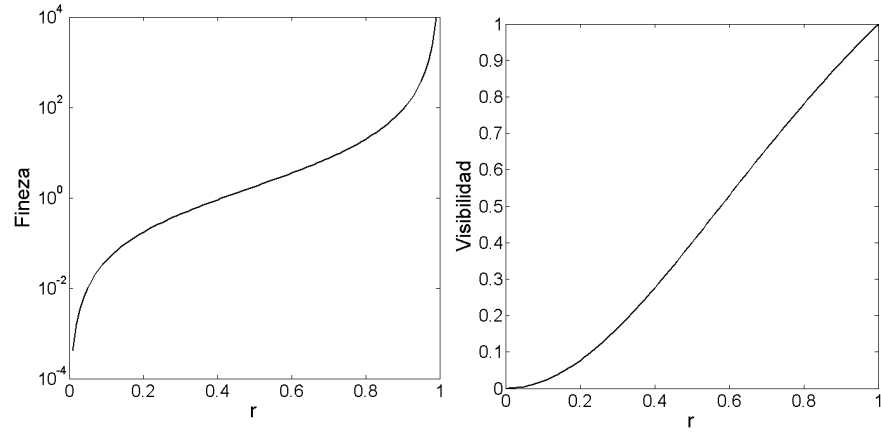


Figura 18.6: Fineza y visibilidad suponiendo que los dos espejos tienen la misma reflectancia $r_1 = r_2 = r$.

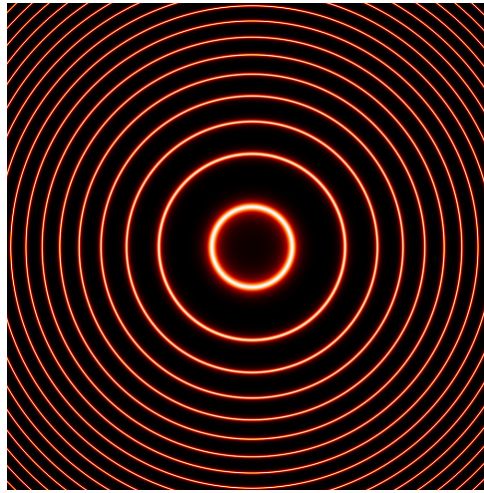


Figura 18.7: Intensidad en la pantalla en un interferómetro Fabry-Perot.

Los mínimos son nulos cuando la visibilidad es la unidad, y esto ocurre cuando $r_1 = r_2 = 1$, que no es muy útil pues entonces no saldría nada de luz por el sistema, al ser los espejos perfectamente reflectantes. En la Figura 18.6 se muestra la Fineza y la Visibilidad para diversos valores de $r_1 = r_2 = r$.

Poder resolutivo

En la Figura 18.7 se muestra la distribución de intensidad a la salida del interferómetro de Fabry-Perot. Se observa que la posición de los máximos de intensidad son iguales a los del interferómetro de Michelson. Una de las principales diferencias del interferómetro de Fabry-Perot respecto al interferómetro de Michelson es que, debido a las interferencias múltiples, los picos de intensidad máxima se estrechan, más cuanto mayor sea la Fineza. Una forma de caracterizar esta distribución de intensidades es cuantificar la anchura de los picos. Esto se puede hacer, por ejemplo, identificando cuál es la anchura $\delta\varphi$ a mitad de altura, es decir, a $\mathcal{T}_{max}/2$. Esto sucede cuando

$$\mathcal{T}\left(m\pi + \frac{\delta\varphi}{2}\right) = \frac{\mathcal{T}_{max}}{2}, \quad (18.16)$$

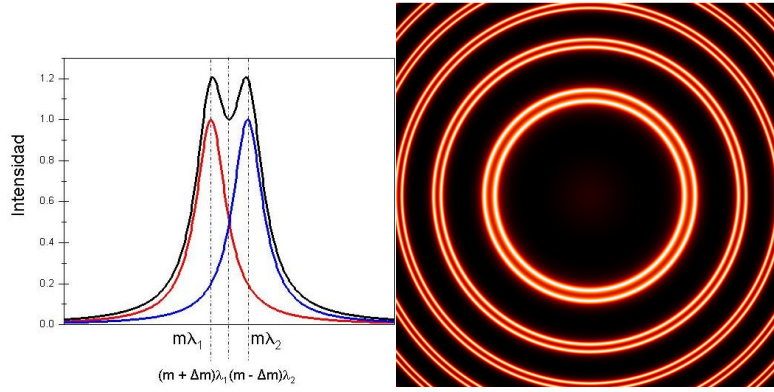


Figura 18.8: Resolución de picos del doblete de sodio, donde las longitudes de onda son $588,9950 \text{ nm}$ y $589,5924 \text{ nm}$ respectivamente $\Delta\lambda = 0,5974 \text{ nm}$.

lo que sucede cuando

$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\delta\varphi}{2} \right)} = \frac{1}{2}, \quad (18.17)$$

y por ello $\sin \left(\frac{\delta\varphi}{2} \right) = 1/\sqrt{F}$. Despejando esta ecuación se obtiene que la anchura de los picos se puede escribir exclusivamente en función de la Fineza

$$\delta\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right). \quad (18.18)$$

Como estamos interesados en $F \gg 1$, podemos hacer un desarrollo en serie de potencias

$$\delta\varphi \simeq \frac{2}{\sqrt{F}}. \quad (18.19)$$

$$\arcsin x \approx x$$

Cuanto mayor sea la Fineza y la Visibilidad, más estrechos son los anillos del interferómetro. El interés de este interferómetro está en que la obtención de picos estrechos significa mucha sensibilidad. Variaciones de fase muy pequeñas producen variaciones de intensidad notables. Estas variaciones de fase pueden venir de un cambio de la distancia entre los espejos o en el índice de refracción en el interior del interferómetro o en la longitud de onda de la fuente. Todo ello se puede medir con precisión usando un Fabry-Perot.

La capacidad del instrumento de discriminar longitudes de onda distintas se denomina *poder resolutivo*. El interferómetro puede resolver o discriminar dos longitudes de onda, o ser insuficiente para la tarea. El poder resolutivo dependerá de la separación entre máximos $\Delta\varphi$ y de la anchura a media altura de estos, $\delta\varphi$. Se suele utilizar un criterio para distinguir las dos situaciones: las longitudes de onda se resuelven si $\Delta\varphi \geq \delta\varphi$ y no se resuelven si $\Delta\varphi < \delta\varphi$, Figura 18.8.

Si consideramos dos longitudes de onda muy próximas, $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ y $\Delta\lambda \ll \lambda, \lambda'$

$$\Delta\varphi = 2\pi n d \cos \theta \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \geq \frac{2}{\sqrt{F}}. \quad (18.20)$$

Esta expresión nos dará eventualmente la mínima diferencia de longitud de onda que podemos resolver. Bajo la hipótesis de que estamos trabajando en el entorno de un máximo

$$2\pi n d \cos \theta = \pi M \lambda, \quad (18.21)$$

esta expresión se puede escribir como

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq \frac{\pi}{2} M \sqrt{F}, \quad (18.22)$$

donde el primer término es la definición del poder resolutivo y el segundo término solamente depende de las características del interferómetro.

CONCLUSIONES

- Cuando hay más de dos ondas también se producen interferencias, como en el interferómetro de Fabry-Perot. Es necesario que la reflectancia de las interfaces sea grande para que los picos interferenciales sea muy estrechos y se pueda obtener una gran resolución en el cálculo de los espectros.

REDES DE DIFRACCIÓN

El fenómeno de la difracción presenta múltiples aplicaciones, como las redes de difracción, de gran utilidad en campos como la espectroscopía y la metrología óptica. Aplicaremos los formalismos de Fresnel y Fraunhofer a su estudio y veremos sus interesantes aplicaciones en espectroscopía y metrología óptica.

Índice

19.1	Introducción	262
19.2	Tipos de redes	263
19.3	Descomposición de Fourier	264
19.4	Campo lejano: órdenes de difracción	266
19.5	Poder resolutivo de una red de difracción	269
19.5.1	Solapamiento de los espectros	270
19.6	Campo cercano: efecto Talbot	271
19.7	Objetos aleatoriamente distribuidos	272
19.7.1	Distribución periódica	273
19.7.2	Distribución aleatoria	273

OBJETIVOS

- Profundizar en los procesos de difracción de Fresnel y Fraunhofer.
- Saber caracterizar los distintos tipos de redes de difracción.
- Conocer la descomposición de Fourier de una estructura periódica.
- Conocer el proceso de división en órdenes de difracción en las redes.
- Calcular la ecuación de la red de difracción y la potencia de cada uno de los órdenes.
- Determinar el poder resolutivo de una red.
- Conocer el efecto Talbot.
- Saber las diferencias en la difracción entre objetos periódicamente y aleatoriamente distribuidos.

REFERENCIAS GENERALES:

- Loewen, E.G. and Popov, E., "Diffraction gratings and applications", M. Dekker (1997).
- Palmer, C.A. and Loewen, E.G., "Diffraction grating handbook", Richardson Grating Laboratory (2000).
- Paturski, K., "The Self-Imaging Phenomenon and its Applications", Progress in optics (1989), 1–108.
- Keren, E. and Kafri, O., "Diffraction effects in moiré deflectometry", J. Opt. Soc. Am. A (1985), 111–120.

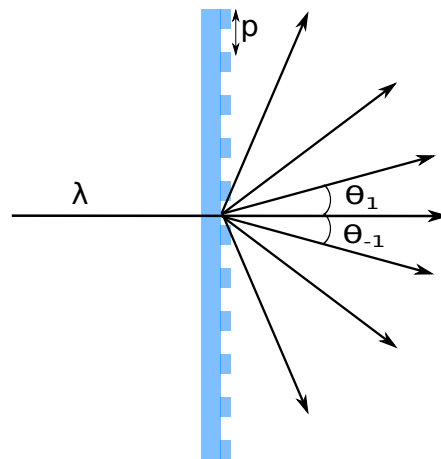


Figura 19.1: Esquema de generación de órdenes de difracción por una red de difracción.

- Petit, R., "Electromagnetic theory of gratings", Springer-Verlag (1980).
- E. Popov, "Gratings: Theory and numeric applications" (2012).

INTRODUCCIÓN

Podemos definir una red de difracción como un elemento óptico que modula de forma periódica alguna propiedad de la luz. Las redes más comunes modulan la amplitud o la fase de la onda incidente, aunque se puede modular de forma periódica cualquier otra propiedad de la luz, tal como la polarización o la coherencia.

La red de difracción es uno de los instrumentos ópticos de mayor aplicabilidad tanto en la óptica como en otras ciencias [? ?]. Por ejemplo nos podemos encontrar redes de difracción en los espectrómetros¹, para separar las longitudes de onda. La espectroscopía permite el estudio de la interacción entre la radiación electromagnética y la materia, con absorción o emisión de energía radiante. Tiene aplicaciones en astronomía, física y química, entre otras disciplinas científicas. El análisis espectral se basa en detectar la absorción o emisión de radiación electromagnética a ciertas longitudes de onda y se relacionan con los niveles de energía implicados en una transición cuántica. Su estudio nos permite analizar los átomos y moléculas (a través de las transiciones atómicas), conocer la composición de estrellas (análisis de la evolución estelar).

En metrología las redes de difracción se utilizan como escalas, siendo uno de los sistemas más robustos para la medida precisa de la posición, con resoluciones estándar del orden de 1-5 micras y precisiones de hasta 10 nm. Otra de las aplicaciones recientes es el uso de redes de difracción de periodo menor a la longitud de onda para la realización de capas antirreflectantes. Se genera un índice de refracción efectivo que es gradual en la red de difracción, por lo que no es aplicable la teoría de la reflexión de Fresnel, Cap. 8.

Dos son las características fundamentales de las redes de difracción. Por un lado, es capaz de generar varios haces de luz separados angularmente, Figura 19.1. Por otro lado, la ecuación de la red nos informa que el ángulo de cada haz depende fuertemente de la longitud de onda. Por ello, la red de difracción es un elemento fuertemente dispersor, Figura 19.2, mucho más eficiente el prisma, basado en la variación del índice de refracción con la longitud de onda. Es por ello que los espectrómetros actuales suelen utilizar redes de difracción en lugar de prismas.

¹ info sobre espectrómetros: <http://en.wikipedia.org/wiki/Spectrometers>



Figura 19.2: Ejemplo de dispersión de una red de difracción para el análisis de espectros (a) fuente con espectro discreto, b) fuente con espectro continuo.

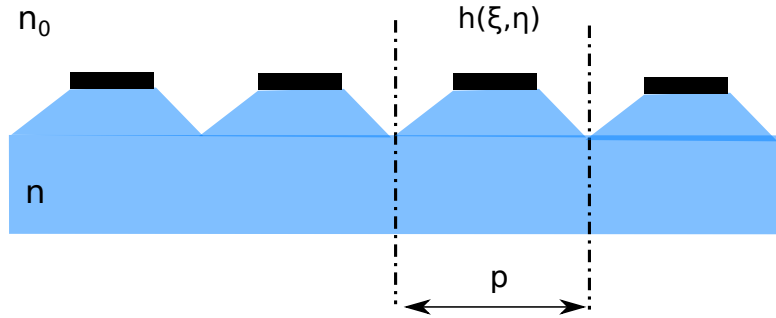


Figura 19.3: Red genérica cuya transmitancia es $t(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)e^{ik(n-n_0)h(\xi, \eta)}$

TIPOS DE REDES

Las redes que vamos a estudiar son las redes de amplitud y de fase, en condiciones de transmisión y reflexión, Figura 19.3. Utilizaremos la aproximación de elemento delgado (TEA, Thin Element Aproximation). Es por ello que la transmitancia (o reflectancia) de la red se modela matemáticamente mediante

$$t(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)e^{i\phi(\xi, \eta)}. \quad (19.1)$$

donde $A(\xi, \eta)$ es la modulación en la amplitud y $\phi(\xi, \eta)$ es la modulación de la fase. Para el caso de la red de difracción $A(\xi, \eta)$ y $\phi(\xi, \eta)$ son periódicos. Si consideramos que el espesor máximo del elemento difractor es L , entonces el desfase producido por la red de difracción es

$$\phi|_0^L(\xi, \eta) = k \int_0^{h(\xi, \eta)} n(\xi, \eta, z) dz + kn_0 [L - h(\xi, \eta)]. \quad (19.2)$$

donde $n(\xi, \eta, z)$ es el índice de refracción dentro de la red de difracción y n_0 es el índice de refracción en que rodea al elemento difractivo. Normalmente dentro del material es constante, entonces $n(\xi, \eta, z) = n$, resultando que el desfase producido por la red de difracción es

$$\phi|_0^L(\xi, \eta) = k(n - n_0)h(\xi, \eta). \quad (19.3)$$

donde hemos despreciado una fase constante kL que no afecta a los fenómenos difractivos.

Una red de amplitud modula únicamente la amplitud de la onda incidente, es decir $A(\xi, \eta)$, siendo el desfase producido constante, $\phi(\xi, \eta) = cte$. Un ejemplo de

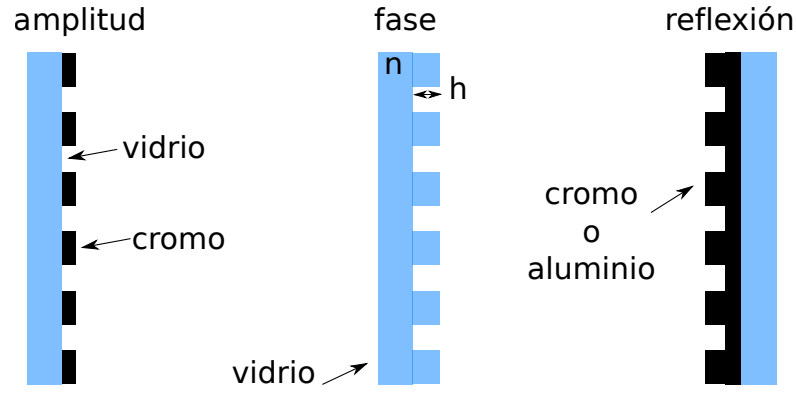


Figura 19.4: Ejemplos de redes de difracción a) de amplitud tanto en transmisión como en reflexión (de cromo sobre vidrio) b) de fase por transmisión (vidrio) y c) de fase por reflexión (cromo).

este tipo de redes se muestra en la Figura 19.4a. La forma más sencilla de grabación de este tipo de redes es mediante fotolitografía, utilizando un sustrato de vidrio y una capa de cromo de un espesor de unos 100 nm . La luz que llega al cromo es reflejada, mientras atraviesa la máscara donde no hay cromo.

Para modular la fase se pueden utilizar redes de vidrio, como se muestra en Figura 19.4b, y de metal, Figura 19.4c. La primeras actúan por transmisión siendo el desfase que produce igual a

$$t(x) = \exp [ik(n-1)h(x)], \quad (19.4)$$

mientras que en el caso de la red de fase por reflexión, la luz pasa dos veces por la almena, por lo que la función de transmitancia (en este caso reflectancia) resulta ser

$$t(x) = \exp [-2ikh(x)]. \quad (19.5)$$

El factor 2 es debido a que el camino óptico del haz es el doble en este tipo de redes. Cuando la red es del tipo Figura 19.4c en lugar de cromo se suele metalizar con aluminio pues sus propiedades reflectoras son mucho mejores.

DESCOMPOSICIÓN DE FOURIER

Tanto en redes de amplitud como de fase, la modulación se produce de forma periódica. Por ello el análisis de cómo se comporta la red se puede realizar mediante un análisis de Fourier, de forma que la transmitancia se puede describir matemáticamente mediante

transmitancia de una
red de difracción

$$t(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp \left(\frac{2\pi i l x}{p} \right). \quad (19.6)$$

donde p es el periodo y a_l son los coeficientes de Fourier, que se obtienen mediante

$$a_l = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} t(x) \exp \left(-2\pi i l \frac{x}{p} \right) dx. \quad (19.7)$$

Dichos coeficientes de Fourier caracterizan por completo las propiedades difractivas de las redes, además del periodo p . Calculemos los coeficientes de Fourier para algunos ejemplos típicos.

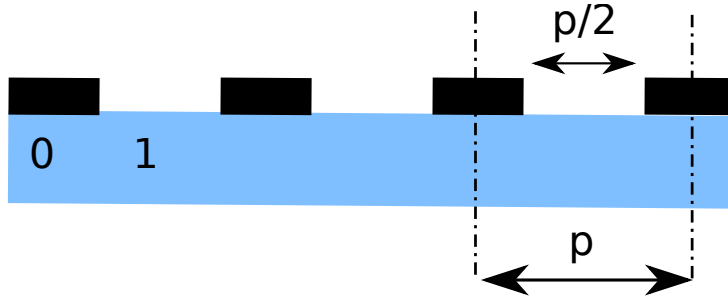


Figura 19.5: Parámetros para calcular los coeficientes de Fourier de una red de Ronchi.

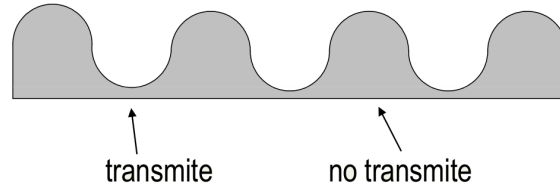


Figura 19.6: red sinusoidal con transmitancia sinusoidal.

RED DE AMPLITUD DE RONCHI Sea la red de difracción que se muestra Figura 19.5. Una red de difracción de Ronchi es una red de difracción de amplitud donde la parte opaca y transparente tienen el mismo tamaño. Utilizando (19.7) los coeficientes de Fourier resultan

$$a_l = \frac{1}{p} \int_{-p/4}^{p/4} \exp\left(-2\pi i l \frac{x}{p}\right) dx. \quad (19.8)$$

El valor de los coeficientes resulta ser, entonces,

$$a_l = \begin{cases} 1/2 & l = 0 \\ 0 & l \text{ par} \\ \frac{1}{\pi l} & l = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{1}{\pi l} & l = 3, 7, 11, \dots \end{cases}. \quad (19.9)$$

RED SINUSODIAL DE AMPLITUD Aunque las redes binarias son las más utilizadas por su facilidad de fabricación también son de interés otro tipo de redes, como la red de transmitancia sinusoidal, fabricable mediante técnicas interferométricas y holográficas. Su transmitancia tiene la forma

$$t(x) = 1 + m \cos(2\pi \frac{x}{p}) = 1 + \frac{m}{2} e^{2\pi i \frac{x}{p}} + \frac{m}{2} e^{-2\pi i \frac{x}{p}} \quad (19.10)$$

y, por consiguiente los coeficientes de Fourier son

$$a_{-1} = m/2, a_0 = 1, a_1 = m/2. \quad (19.11)$$

RED BINARIA DE FASE Normalmente se prefieren las redes de fase puesto que los órdenes de difracción distintos al orden cero son mayores. Supongamos la red binaria de fase de la Figura 19.7. Los parámetros de interés son el índice de refrac-

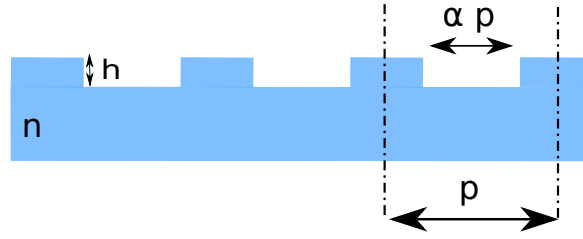


Figura 19.7: Parámetros para calcular los coeficientes de Fourier de una red binaria de fase.

ción n , la altura de la almena h y el coeficiente de llenado α (fill factor). Utilizando (19.7), los coeficientes de Fourier de esta red resultan ser

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha (e^{-i\delta} - 1) + 1, \\ a_l &= \alpha (e^{-i\delta} - 1) \text{sinc}(\pi l \alpha), \end{aligned} \quad (19.12)$$

donde el desfase resulta ser $\delta = k(n-1)h$ para el caso de transmisión y $\delta = 2k(n-1)h$ para el caso de reflexión. Estudiemos distintos caso de interés, según el desfase. De (19.12) se obtiene para anular el coeficiente de orden 0, $a_0 = 0$ entonces es necesario que $\alpha = 1/2$ y $e^{-i\delta} = -1$, es decir $\delta = \pi$. Bajo estas condiciones los coeficientes de Fourier resultan

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_l &= -\text{sinc}(\pi l \alpha) \end{aligned} \quad (19.13)$$

que son justamente el doble que para el caso de la red de amplitud, excepto para $a_0 = 0$. Es por ello que esta red es mucho más eficiente. Para el caso de que el desfase producido por la red sea $\delta = 2\pi$, los coeficientes resultan

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_l &= 0 \end{aligned} \quad (19.14)$$

para cualquier factor de forma α . Esto es así es debido a la aproximación utilizada de elemento delgado, pero existen aproximaciones más rigurosas en las cuales este resultado no es cierto.

CAMPO LEJANO: ÓRDENES DE DIFRACCIÓN

Sea una red de difracción caracterizada mediante $t(x) = \sum_l a_l \exp(2\pi i l x / p)$, (19.6), que iluminamos con una onda plana contenida en el plano XZ, $k_y = 0$, $k_x = k \sin \theta$. La red de difracción, o el haz que la ilumina, no tiene una extensión infinita sino que tiene una anchura w . Por ello el haz incidente resulta ser

$$\mathbf{E}_{inc}(\xi) = \mathbf{E}_0 e^{ik_x \xi} \text{rect}(\xi/2w) = \mathbf{E}_0 e^{ik \xi \sin \theta} \text{rect}(\xi/2w). \quad (19.15)$$

Conocidos el haz incidente y la transmitancia de la red, la intensidad en campo lejano se puede obtener de una forma sencilla utilizando la aproximación de Fraunhofer, que para el caso de objetos con invariancia en la dirección η resulta

$$E(P_0) = \frac{e^{ik(z + \frac{x^2+y^2}{2z})}}{\sqrt{i\lambda z}} \int t(\xi) \mathbf{E}_{inc}(\xi) e^{-ik \frac{x'}{f} \xi} d\xi. \quad (19.16)$$

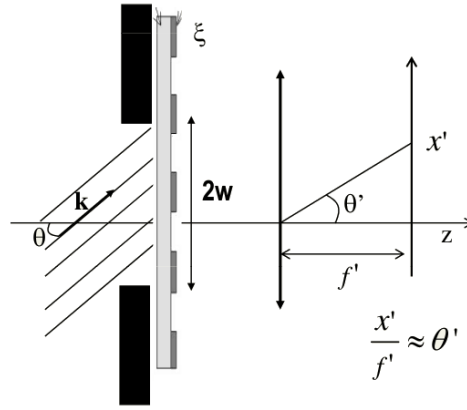


Figura 19.8: Esquema para analizar el comportamiento de la luz en campo lejano dispersada por una red de difracción.

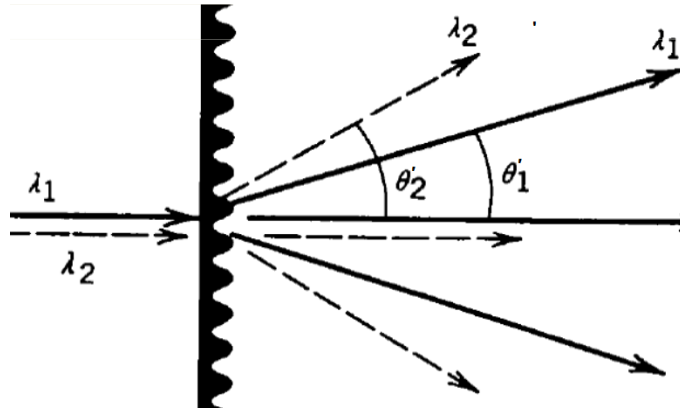


Figura 19.9: El haz incidente se divide en distintos haces cuando atraviesa la red de difracción.

Considerando $x'/f' \approx \sin \theta'$ se obtiene que el campo es

$$E(\theta') = K \mathbf{E}_0 \int_{-w}^w \text{rect}(\xi/2w) e^{ik\xi \sin \theta} \sum_l a_l \exp\left(\frac{2\pi i l \xi}{p}\right) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta' \xi} d\xi, \quad (19.17)$$

donde $K = \exp\{ik[z + (x^2 + y^2)/(2z)]\} / \sqrt{i\lambda z}$. El resultado de esta integral es sencillo

$$E(\theta') = K' \mathbf{E}_0 \sum_l a_l \text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{l}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right], \quad (19.18)$$

con $K' = Kw$.

La intensidad se obtiene multiplicando el campo por su complejo conjugado

$$I(\theta') = |K' \mathbf{E}_0|^2 \sum_l \sum_{l'} a_l a_{l'}^* \text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{l}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right] \text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{l'}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right] \quad (19.19)$$

Ahora bien, si la anchura de la zona iluminada por el haz w es suficientemente grande entonces los picos son muy estrechos y no solapan. Entonces

$$\text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{l}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right] \text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{l'}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right]$$

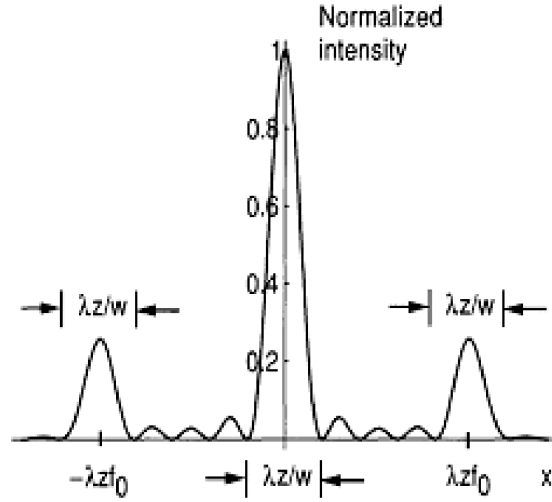


Figura 19.10: Según, (19.20), El haz se divide en ordenes de difracción de diversa potencia y cuya anchura depende de la longitud de onda y la anchura iluminada de la red.

es nulo excepto cuando $l = l'$. Por ello, no se producen efectos interferenciales entre picos. La intensidad se simplifica a

$$I(\theta') = I_0 \sum_l |a_l|^2 \text{sinc}^2 \left[\pi w \left(\frac{l}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right], \quad (19.20)$$

donde $I_0 = |K' E_0|^2$. Es decir, el haz incidente se divide en varios haces, que generan diversos picos de difracción en las posiciones

$$p(\sin \theta'_l - \sin \theta) = l\lambda. \quad (19.21)$$

que es conocida como la ecuación de la red. Puesto que θ'_l está comprendida entre los ángulos $(-\pi/2, \pi/2)$, los valores del parámetro l está limitado para que se cumpla 19.21 con valores reales, $l \in (N_{\min}, N_{\max})$. Incluso si el periodo de la red es suficientemente pequeño, puede suceder que solamente se genere el orden de difracción $l = 0$.

Cuando la zona iluminada es infinita, los picos se hace infinitamente estrechos

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{n}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right) \right] = \delta \left(\frac{n}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right), \quad (19.22)$$

siendo la intensidad

$$I(\theta') \approx I_0 \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} |a_n|^2 \delta \left(\frac{n}{p} + \frac{\sin \theta - \sin \theta'}{\lambda} \right), \quad (19.23)$$

donde $|a_n|^2$ es la eficiencia relativa de cada uno de los haces difractados. Entonces la intensidad total transmitida por la red viene determinada por

$$I_{total} \approx I_0 \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} |a_n|^2, \quad (19.24)$$

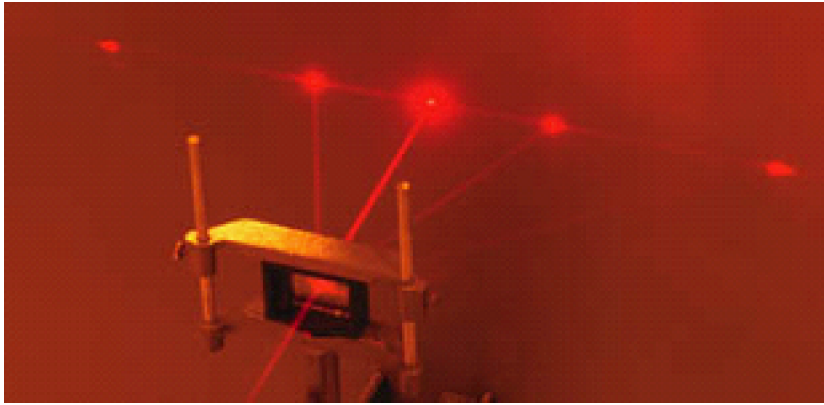


Figura 19.11: División del haz en varios mediante el uso de una red de difracción.

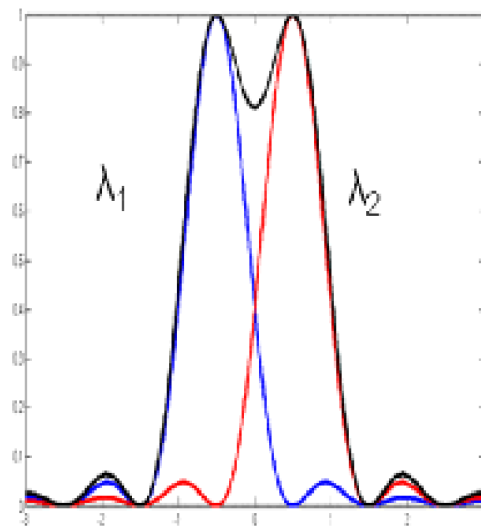


Figura 19.12: Resolución de dos longitudes de onda mediante una red de difracción.

es decir, es la suma de la potencia de las intensidades de cada orden de difracción, dada por $|a_n|^2$.

PODER RESOLUTIVO DE UNA RED DE DIFRACCIÓN

Según (19.21), la posición de los órdenes de difracción depende de la longitud de onda. Esto se utiliza en el análisis espectral de fuentes de luz puesto que nos permite separar el haz incidente en las distintas longitudes de onda. No obstante, la capacidad de resolución no es infinita, sino que depende de los parámetros del haz y de la red. Para analizar el poder resolutivo supongamos que tenemos dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 que queremos resolver, Figura 19.12.

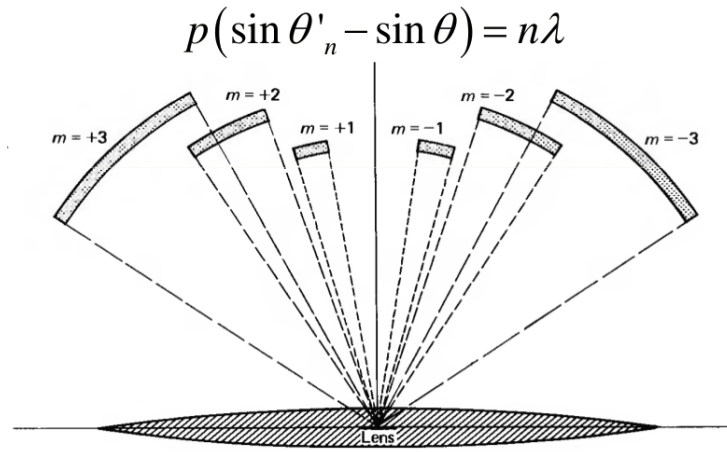


Figura 19.13: Esquema que muestra el solapamiento de espectros a medida que el orden espectral aumenta.

Cada una de estas longitudes de onda irá a una cierta posición según la ec. de la red (19.21)

$$\begin{aligned}\sin \theta'_{l,1} - \sin \theta &= \frac{l\lambda_1}{p}, \\ \sin \theta'_{l,2} - \sin \theta &= \frac{l\lambda_2}{p}.\end{aligned}\quad (19.25)$$

Restando ambas ecuaciones resulta que la diferencia angular entre las dos longitudes de onda resulta

$$\Delta \sin \theta_l \approx \Delta \theta_l = \frac{l}{p} \Delta \lambda \quad (19.26)$$

Como la anchura a media altura del haz difractado viene dada por (19.20)

$$\Delta \theta = \lambda/w, \quad (19.27)$$

consideraremos que las longitudes de onda se pueden resolver cuando la distancia angular de las longitudes de onda es mayor que la anchura de los haces. Comparando (19.26) con (19.27), el criterio de resolución espectral resulta

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = l \frac{w}{p} = lN \quad (19.28)$$

donde l es el orden espectral y $N = w/p$ es el número de periodos iluminados de la red.

Solapamiento de los espectros

Si queremos determinar el espectro de un haz de luz entre los intervalos λ_1 y λ_2 hay que tener en cuenta que los intervalos angulares para distintos órdenes de difracción no deben solapar, como se muestra en la Figura 19.13.

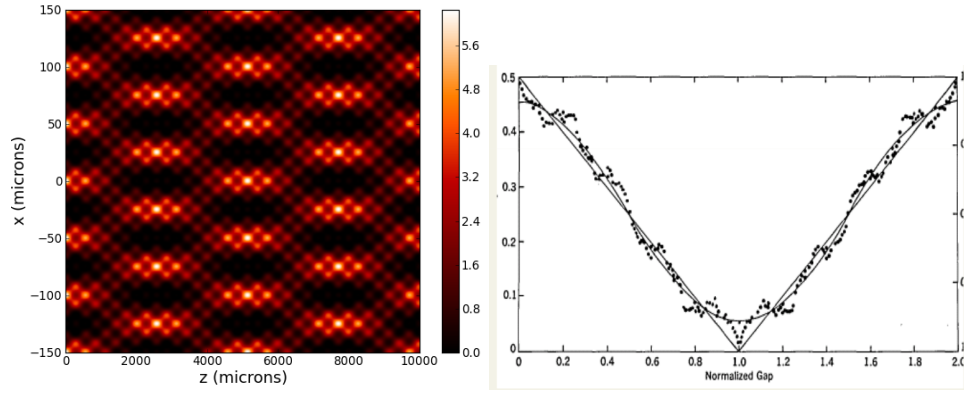


Figura 19.14: Intensidad después de la red de difracción, mostrando los planos de Talbot y la inversión del contraste (resultado experimental) y b) Contraste para el primer plano de Talbot.

CAMPO CERCANO: EFECTO TALBOT

Para conocer la distribución de intensidad en campo cercano utilizaremos la aproximación de Fresnel, considerando la invariancia de la red de difracción en el eje η . entonces el campo difractado se puede calcular a partir de 14.12

$$\mathbf{E}(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} e^{ikz} \int \mathbf{E}_0(\xi) e^{i \frac{k}{2z} (x - \xi)^2} d\xi. \quad (19.29)$$

Supongamos que el haz incidente es una onda plana en dirección normal a la red, $\mathbf{E}_{inc}(\xi) = \mathbf{E}_0$, por lo que el campo se calcula mediante

$$\mathbf{E}(x, z) = K \mathbf{E}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{\frac{2\pi i l x}{p}} e^{i \frac{k}{2z} (x - \xi)^2} d\xi \quad (19.30)$$

donde $K = \sqrt{i/\lambda z} e^{ikz}$. Debido a la linealidad, los operadores integral y suma se pueden intercambiar y considerando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a} - c}, \quad (19.31)$$

el campo difractado resulta

$$\mathbf{E}(x, z) = K \mathbf{E}_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp\left(2\pi i l \frac{x}{p}\right) \exp\left(i 2\pi l^2 \frac{\lambda}{2p^2} z\right). \quad (19.32)$$

La intensidad $I(x, z) = |\mathbf{E}(x, z)|^2$ es entonces

$$I(x, z) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l a_{l'}^* \exp\left[2\pi i (l - l') \frac{x}{p}\right] \exp\left[2\pi i (l^2 - l'^2) \frac{\lambda}{2p^2} z\right]. \quad (19.33)$$

La intensidad para una red de Ronchi se muestra en la Figura 19.14. El primer término exponencial tiene dependencia en x , por lo que el periodo de las franjas resulta ser p , pues es el orden fundamental.

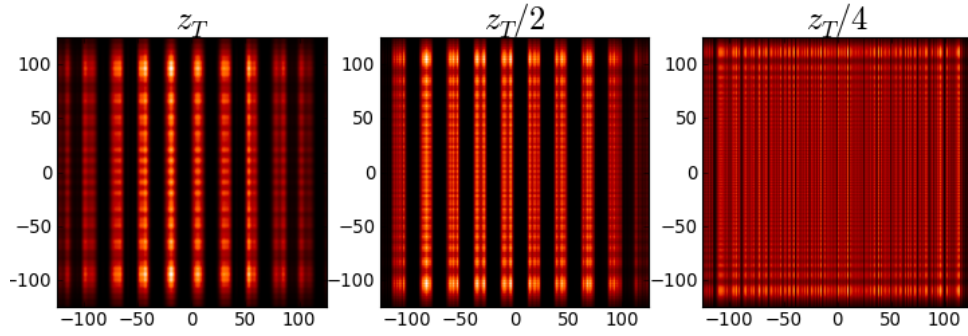


Figura 19.15: Cálculo numérico de la propagación después de la red para diferentes distancias. La red se ilumina con una onda armónica plana.

El segundo término produce el fenómeno de las autoimágenes, al ser periódico en el eje z . Para distancias dadas por

$$z_T = 2p^2/\lambda, \quad (19.34)$$

conocidas como distancia de Talbot, el campo resulta ser

$$E(x, nz_T) = KE_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp\left(2\pi i l \frac{x}{p}\right), \quad (19.35)$$

que es el mismo campo justo a la salida de la red de difracción. Este fenómeno se conoce como efecto Talbot². En la Figura 19.15 se muestra un cálculo numérico de la propagación después de la red para diferentes distancias cuando la red se ilumina con una onda armónica plana. A distancia z_T la red se reproduce (salvo efectos de borde) de forma igual a la red original. A distancia $z_T/2$ la red se reproduce con inversión de contraste (las zonas iluminadas en el plano de observación son las zonas oscuras en la red). A distancia $z_T/4$ las franjas desaparecen.

OBJETOS ALEATORIAMENTE DISTRIBUIDOS

El análisis anteriormente desarrollado, basado en la descomposición de Fourier de la red, también se puede realizar a partir de la suma de los campos generados por cada una de las rendijas de la red. Según vimos en las propiedades de la transformada de Fourier, Figura 15.2, si tenemos una función $u(x)$ y su campo lejano resulta ser $\hat{u}(x')$, entonces el campo de una función desplazada $u(x - a)$ resulta ser $\hat{u}(x') e^{-2\pi i a x'}$. Por ello, podemos ver la red de difracción como una suma de rendijas equidistribuidas, Figura 19.16.

Entonces, se produce un efecto interferencial de la figura de difracción generada por cada rendija. Si $\hat{u}_1(x')$ es el campo difractado por una rendija, el campo generado por la red resulta ser

$$\begin{aligned} \hat{u}(x') &= \hat{u}_1(x') (1 + e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3} + \dots) \\ &= \hat{u}_1(x') \sum_{j=0}^N e^{i\varphi_j}, \end{aligned} \quad (19.36)$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ resultan ser los desfases de cada una rendija debidos a su posición, $\varphi_l = -2\pi l p x'$.

² Fue descubierto por H. F. Talbot en 1836.

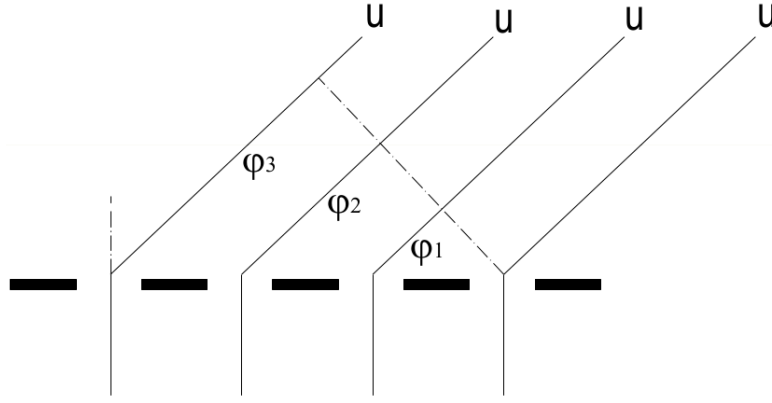


Figura 19.16: Esquema de red de difracción como suma de rendijas.

Distribución periódica

Supongamos que tenemos N rendijas. Cuando la distancia entre las rendijas es siempre la misma, entonces los desfases resultan ser

$$\varphi_l = l\varphi, \quad (19.37)$$

donde $\varphi = -2\pi p x'$, y como consecuencia el campo generado por (19.36) resulta

$$\hat{u}(x') = \hat{u}_1(x') \sum_{l=0}^N e^{il\varphi} = \hat{u}_1(x') \frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}. \quad (19.38)$$

Puesto que una rendija unidimensional tiene una distribución de intensidad (??)

$$I(x') = I_0 \text{sinc}^2 \left[\left(k_x - k \frac{x'}{f'} \right) \frac{a}{2} \right] \delta(y' - y_0), \quad (19.39)$$

se obtiene el mismo resultado que para una red de Ronchi, puesto que

$$\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \rightarrow N \text{sinc}(N\frac{\varphi}{2}), \quad (19.40)$$

es decir, $\hat{u}(x') = I_0 \text{sinc}^2 \left[\left(k_x - k \frac{x'}{f'} \right) \frac{a}{2} \right] \text{sinc}(N\frac{\varphi}{2})$. Un análisis de esta distribución para el caso bidimensional se muestra en la Figura 19.17.

Distribución aleatoria

En el caso de que las rendijas estén aleatoriamente distribuidas, la intensidad en campo lejano resulta ser

$$I(x') \propto |\hat{u}_1(x')|^2 \left\langle \sum_{j=1}^N \sum_{j'=1}^N e^{-i(\varphi_j - \varphi_{j'})} \right\rangle \quad (19.41)$$

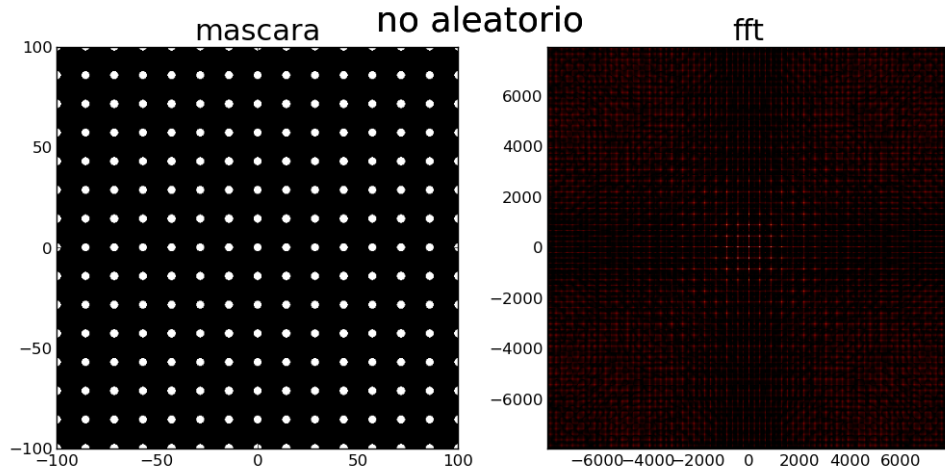


Figura 19.17: Distribución de intensidad en el campo lejano para una red de puntos uniformemente distribuida.

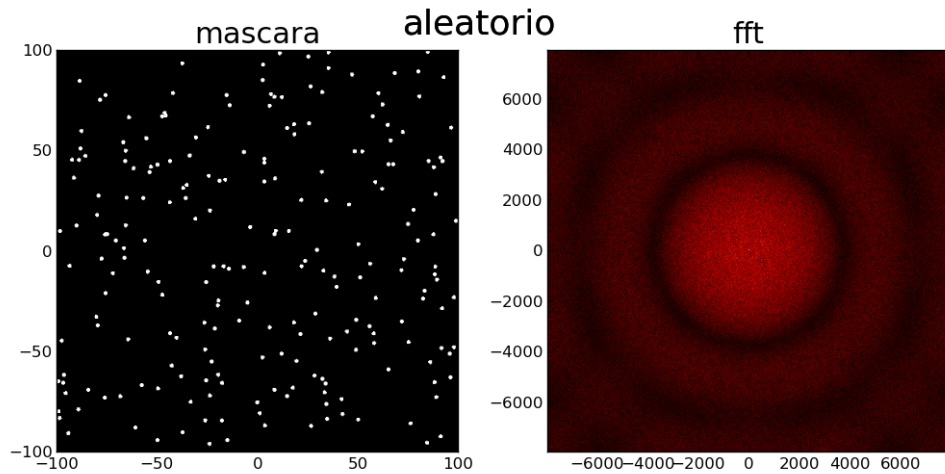


Figura 19.18: Distribución de intensidad en el campo lejano para una red de puntos aleatoriamente distribuida.

donde se debe realizar un promediado puesto que los desfases son aleatorios. Ahora bien, en promedio los términos exponenciales son nulos excepto cuando $j' = j$, que resultan ser la unidad. Entonces, la intensidad promedio resulta ser

$$I(x') \propto |\hat{u}_1(x')|^2 \sum_{j=1}^N 1 = N |\hat{u}_1(x')|^2 \quad (19.42)$$

Es decir, cuando hay N rendijas aleatoriamente distribuidas, o en general, cualquier objeto, se ubica de forma aleatoria, la intensidad promedio es N veces la distribución de intensidad de una única rendija u objeto utilizado.

CONCLUSIONES

- Una red de difracción se puede caracterizar de forma matemática como un desarrollo en series de Fourier.

- En campo lejano, cuando el objeto es una red de difracción, el haz incidente se divide en varios, denominados órdenes de difracción.
- La energía de cada orden de difracción depende de los coeficientes de Fourier.
- En campo cercano se produce el fenómeno de las autoimágenes.
- Cuando la posición de los objetos es aleatoria, se produce un fenómeno difractivo, pero no interferencial.

Una lente se puede considerar una máscara de fase y, por ello, se puede tratar el problema de la formación de imágenes (normalmente analizado desde la Óptica Geométrica) como un proceso de difracción. Veremos qué se obtienen ecuaciones similares, aunque más generales, que las de la Óptica Geométrica para determinar cómo se forma la imagen. No obstante, veremos que el proceso de formación de imágenes no es perfecto, como nos dice el modelo geométrico, sino que debido al tamaño finito de las lentes se pierde información de alta frecuencia. Esto se puede medir a través de la Función de Transferencia de Modulación (MTF, Modulation Transfer Function). Asimismo, se muestra que en el plano focal de una lente se obtiene la transformada de Fourier del campo justo a la salida de la lente. Es decir, existen dos planos privilegiados (el plano de Fourier y el plano imagen) donde tenemos la misma cantidad de información, pero presentada de forma distinta. Esto nos permite, con un sistema de dos lentes denominado $4 - f$, poder manipular la imagen en el plano de Fourier y obtener imágenes mejoradas del objeto.

Índice

20.1	Campo en el plano focal de una lente	278
20.2	Formación de la imagen como un proceso de difracción	279
20.3	Espectro de Fourier	280
20.3.1	Frecuencias espaciales en redes de difracción	281
20.3.2	Imagen compleja	282
20.4	Tamaño finito de las lentes	282
20.5	Función de transferencia de modulación	284
20.6	Filtrado óptico	285
20.6.1	Filtrado pasa baja	285
20.6.2	Filtrado pasa alta	287
20.6.3	Filtrado pasa banda	289
20.6.4	Filtrado en fase	290
20.A	Complemento: Filtrado en redes de difracción	291

OBJETIVOS

- Describir una lente como un objeto de fase. Comprender la formación de la imagen a través de una lente como un proceso de difracción de Fresnel.
- Conocer la imagen formada en el plano de Fourier de la imagen.
- Comprender que en el proceso de formación de la imagen se produce un filtrado debido al tamaño finito de las lentes.
- Conocer el sistema $4 - f$ y cómo se utiliza para el filtrado espacial.
- Saber extraer información de la imagen a partir de la *MTF*.
- Conocer los distintos tipos de filtros y sus aplicaciones.

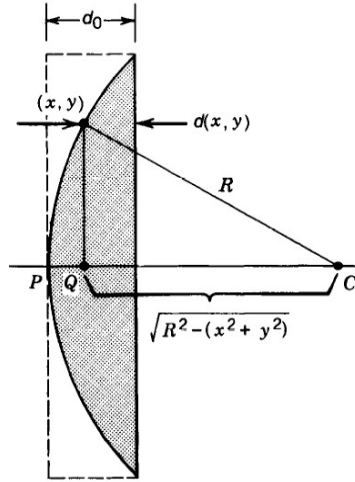


Figura 20.1: Esquema utilizado para calcular la transmitancia de una lente plano-convexa.

REFERENCIAS GENERALES:

- Goodman J.W., "Introduction to Fourier optics", McGraw-Hill (1996).
- Calvo Padilla M.L., "Óptica avanzada", Ariel (2002).
- Steward E.G., "Fourier optics: An Introduction", Dover (2004).
- Reynolds G.O. et al. "The new physical optics notebook: tutorials in Fourier optics", SPIE Optical Engineering Press(1989).

CAMPO EN EL PLANO FOCAL DE UNALENTE

Según la aproximación de elemento delgado, la transmitancia entre dos planos paralelos separados una distancia d_0 que contienen un elemento de fase con una topografía $d(\xi, \eta)$ e índice de refracción n viene caracterizada por

$$t(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) \exp \{ ik[d_0 + (n - 1)d(\xi, \eta)] \}, \quad (20.1)$$

donde $P(\xi, \eta)$ es la función pupila que determina el tamaño del elemento difractor. Esto se puede utilizar para caracterizar una lente (plano-convexa, biconvexa o cualquier otra topografía) como se muestra en la Figura 20.1. En este caso, $d(\xi, \eta)$ representa las superficies esféricas.

$$d(\xi, \eta) = d_0 - R + \sqrt{R^2 - (\xi^2 + \eta^2)}. \quad (20.2)$$

Para poder resolver las integrales, como hicimos en la aproximación de Fresnel, nos quedaremos con los términos cuadráticos

$$d(\xi, \eta) \approx d_0 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R}. \quad (20.3)$$

Reordenando términos, la transmitancia resulta

$$t(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) \exp \left[ik(n - 1) \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} \right], \quad (20.4)$$

y utilizando la expresión de la focal de una lente plano-convexa, utilizada en la Óptica Geométrica, $f' = R/(n-1)$, nos queda una ecuación simplificada de la transmitancia (13.18)

$$t(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) e^{ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2f'}}. \quad (20.5)$$

Según la aproximación de elemento delgado, el campo a la salida de la lente resulta, por consiguiente

$$E_0(\xi, \eta) = E_i(\xi, \eta) t(\xi, \eta) = E_i(\xi, \eta) P(\xi, \eta) \exp \left[ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2f'} \right]. \quad (20.6)$$

Veamos ahora cuál es el campo en planos posteriores a la lente. Para ello utilizaremos la aproximación de Fresnel, utilizada en campo cercano, ec. 14.3,

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint E_0(\xi, \eta) e^{i \frac{k}{2z} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta. \quad (20.7)$$

Introduciendo (20.6) y reordenando términos, que son todos cuadráticos por las aproximaciones realizadas, se obtiene

$$E(x, y, z) = K \iint P(\xi, \eta) E_i(\xi, \eta) e^{ik \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f'} \right) + i \frac{k}{f'} (x\xi + y\eta)} e^{i \frac{k}{2z} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta. \quad (20.8)$$

donde $K = \exp[ik(z + \frac{x^2 + y^2}{2z})] / (i\lambda z)$ es una constante irrelevante excepto para cálculos energéticos. Se observa que en el plano $z = f'$ el término cuadrático desaparece y resulta que el campo, en aproximación de campo cercano resulta

$$E(x, y, z) = K \iint P(\xi, \eta) E_i(\xi, \eta) e^{i \frac{k}{f'} (x\xi + y\eta)} d\xi d\eta, \quad (20.9)$$

es decir, es la transformada de Fourier con un tamaño escalado, dependiente de la focal de la lente

$$E\left(\frac{k}{f'}x, \frac{k}{f'}y, z\right) \propto TF[P(\xi, \eta) E_i(\xi, \eta)]. \quad (20.10)$$

*campo en el plano
focal de la lente*

Este resultado indica que en el plano focal de una lente, cuando se ilumina con una onda armónica plana, no obtenemos exactamente un punto, como nos indica la Óptica Geométrica, sino la transformada de Fourier del campo de entrada a la lente $E_i(\xi, \eta)$ multiplicado por la pupila de la lente $P(\xi, \eta)$. No obstante, cuando la onda incidente es una onda armónica plana y la pupila es infinita, entonces $P(\xi, \eta) E_i(\xi, \eta) = 1$ y $E(x, y, f') = \delta(0, 0)$, que sí es un punto. Como vimos en difracción, debido al tamaño finito de las lentes, no se obtiene este resultado ideal, sino una distribución de energía que sigue una función de Bessel.

FORMACIÓN DE LA IMAGEN COMO UN PROCESO DE DIFRACCIÓN

Desde un punto de vista análogo, podemos ver qué ocurre cuando sobre la lente no incide una onda plana, sino una onda esférica proveniente de un punto (x_0, y_0, s) , Figura 20.2. Esta onda representa un punto proveniente de un objeto que actúa como fuente primaria (emite luz) o secundaria (re-emite luz). Es la forma más sencilla de estudiar el proceso de formación de la imagen, pues después de que este haz esférico divergente pase la lente, se convierte en un haz esférico convergente y la posición del centro es la posición de la imagen.

*utilizamos una onda
esférica escalar*

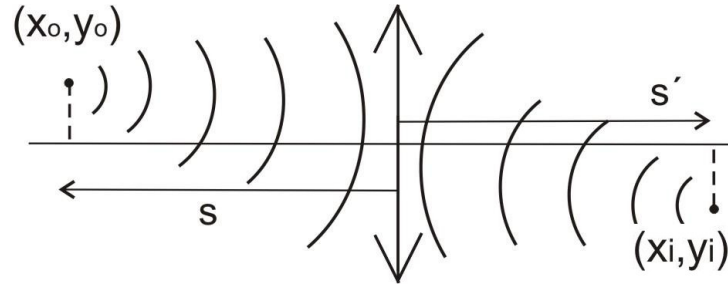


Figura 20.2: Representación de una onda divergente en el punto (x_0, y_0, s) y proceso de formación de imagen. La lente toma la onda divergente y la convierte en otra onda esférica convergente (imagen real).

Veamos el proceso. Una onda esférica divergente centrada en el punto (x_0, y_0, s) se puede representar como

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|}, \quad (20.11)$$

donde $|\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + s^2}$, que en aproximación paraxial $x_0, y_0 \ll s$ (solo nos quedamos con los términos cuadráticos) resulta

$$E(x, y, z) = \frac{1}{s} \exp \left[iks + ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2s} \right]. \quad (20.12)$$

Por consiguiente, justo después de la lente, el campo es, según (20.6)

$$E(x, y, z) = \frac{1}{s} \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2f'} \right] \exp \left[iks + ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2s} \right]. \quad (20.13)$$

Reordenando términos, obtenemos la ecuación de una onda convergente

$$E(x, y, z) = \frac{1}{s} \exp \left[-ik \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{2s'} \right], \quad (20.14)$$

donde

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f'}, \quad x_i = \frac{s'}{s} x_0, \quad y_i = \frac{s'}{s} y_0. \quad (20.15)$$

Estas tres ecuaciones son las mismas que las obtenidas en Óptica Geométrica para la posición de la imagen y el aumento $M = y_i/y_0 = s'/s$ de la imagen respecto al objeto.

ESPECTRO DE FOURIER

Según hemos visto, una lente nos proporciona dos versiones del objeto, una es la imagen

$$E_z(x, y) \propto E_0\left(\frac{s'}{s}x, \frac{s'}{s}y\right), \quad (20.16)$$

obtenida a una distancia s' de la lente y la otra es la transformada de Fourier del objeto,

$$\mathbf{E}\left(\frac{k}{f'}x, \frac{k}{f'}y, z\right) \propto TF[P(\xi, \eta) \mathbf{E}_i(\xi, \eta)], \quad (20.17)$$

obtenida a una distancia f' de la lente, como se muestra en la Figura 20.3.

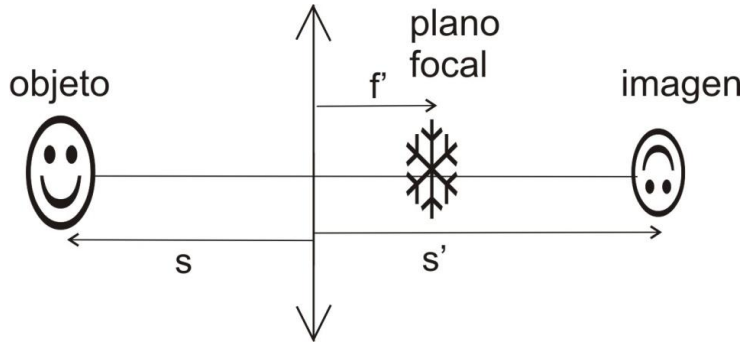


Figura 20.3: Una lente nos da dos versiones del objeto.

Frecuencias espaciales en redes de difracción

El primer caso de frecuencias espaciales que analizamos es para una red de difracción, por su sencillez en el espectro de frecuencias. Según hemos visto en (19.6), una red de difracción es una estructura periódica y, por ello, se puede descomponer en un desarrollo en series de Fourier

$$t(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp\left(\frac{2\pi i l x}{p}\right), \quad (20.18)$$

donde p es el periodo de la red y a_l son las amplitudes de cada una de las frecuencias. Las frecuencias espaciales que contiene la red resulta ser $l \cdot q$, donde $q = 2\pi/p$ es la frecuencia espacial fundamental y el resto, $l = 2, 3, \dots$, son los armónicos de frecuencias doble, triple, etc. Ya hemos visto que en campo lejano, la distribución de los campos se corresponde con puntos (direcciones) específicas alrededor de la cual hay una cierta amplitud

$$E(\theta) = K' E_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \text{sinc} \left[\pi w \left(\frac{l}{p} - \frac{\sin \theta' - \sin \theta}{\lambda} \right) \right]. \quad (20.19)$$

Si los órdenes de difracción (cada uno de los campos l) están separados, entonces la distribución de intensidad resulta ser, Figura 20.4,

$$I(\theta) = |K' E_0|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_l|^2 \text{sinc}^2 \left[\pi w \left(\frac{l}{p} - \frac{\sin \theta' - \sin \theta}{\lambda} \right) \right]. \quad (20.20)$$

donde a_l son los distintos coeficientes de Fourier, que tienen que ver con la intensidad. Los coeficientes son $|a_l|^2$ proporcionan la intensidad de cada orden. En lugar de mirar en el infinito, como hemos visto, podemos analizar la distribución de energía en el plano de Fourier, es decir, en el plano focal de la lente.

ESTRUCTURA PERIÓDICA BIDIMENSIONAL El caso de una estructura periódica bidimensional es similar, determinando la transmitancia como la multiplicación de dos redes, una con dependencia en x y otra con dependencia en y .

$$t_{2D}(x, y) = t(x)t(y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \exp\left(\frac{2\pi i l x}{p}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left(\frac{2\pi i l m y}{p}\right). \quad (20.21)$$

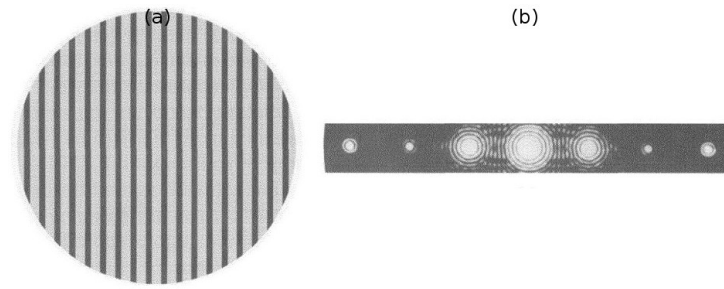


Figura 20.4: (a) Red periódica unidimensional y (b) espectro.

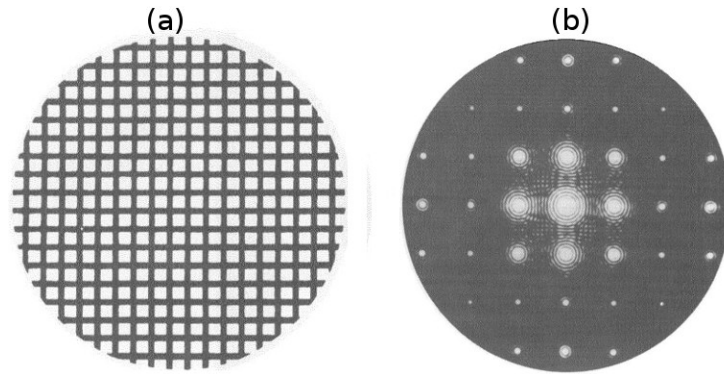


Figura 20.5: (a) Red periódica bidimensional y (b) Espectro.

Entonces, para numerar cada uno de los órdenes de difracción tenemos dos coeficientes, siendo su amplitud

$$a_{l,m} = a_l a_m. \quad (20.22)$$

Claro está, que la intensidad de cada uno de los órdenes es el módulo de este valor $I_{l,m} = |a_{l,m}|^2$. Este espectro bidimensional se muestra en la Figura 20.5

Imagen compleja

Debido a que una imagen compleja no es periódica, como la mostrada en la Figura 20.6, la estructura de frecuencias tampoco es periódica. Se produce un reordenamiento de la energía. Dependiendo de la proporción y dirección de las frecuencias espaciales así será la estructura. Se puede decir que en el centro de la imagen se encuentra la frecuencia $(0,0)$ que representa la señal de continua. Cerca de esta posición se encuentran las bajas frecuencias y a distancias mayores las altas frecuencias. Cuando aparecen líneas significa que en la dirección perpendicular aparecen estructuras pseudo-periódicas en esta dirección (edificios con ladrillos, vallas, etc.)

TAMAÑO FINITO DE LAS LENTES

Veamos ahora, desde la interpretación de las frecuencias espaciales del objeto, el proceso de formación de imágenes. Para ello analicemos el esquema de la Figura 20.7. Supongamos que el objeto, una máscara, es iluminado con una onda armónica plana. Como hemos visto en el proceso de difracción, la transmitancia de la máscara hace que la onda de salida deje de ser plana. Esta onda no plana se puede descomponer en diversas ondas armónicas planas. La lente captura estas

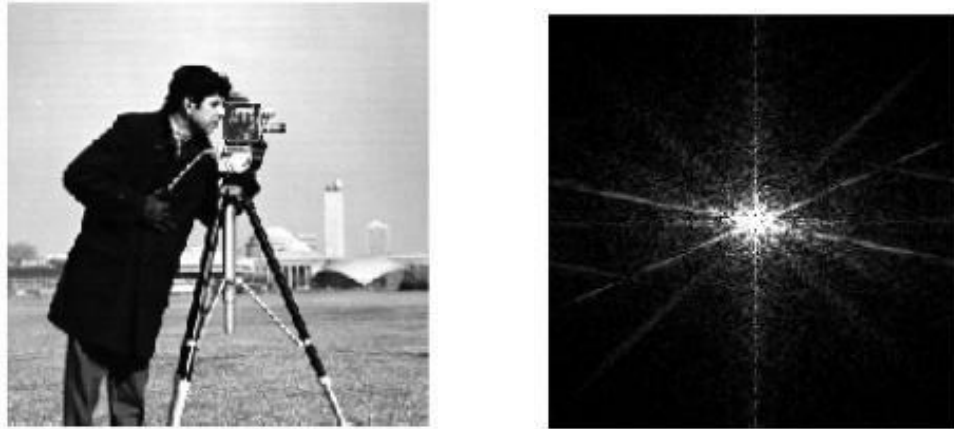


Figura 20.6: Imagen compleja y su espectro.

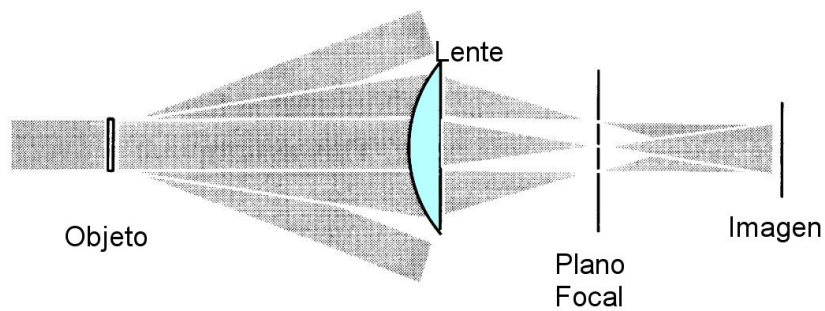


Figura 20.7: Proceso de formación de la imagen a través de la lente, reinterpretado mediante el análisis de frecuencias espaciales.

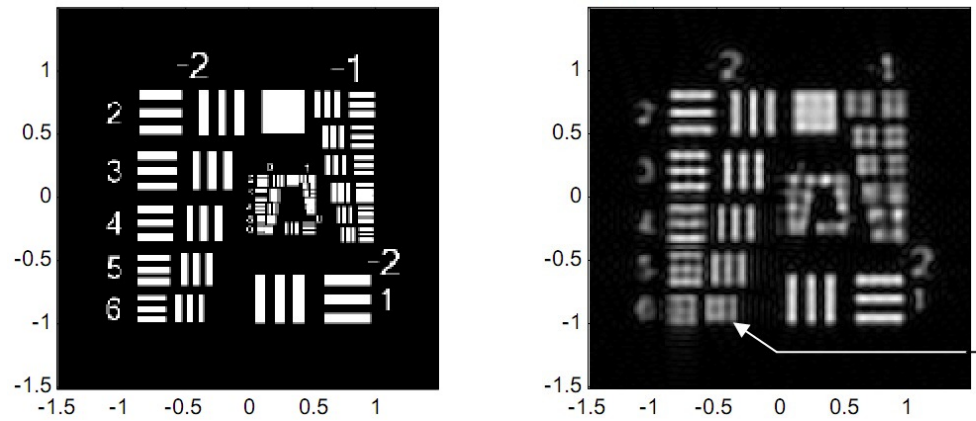


Figura 20.8: Objeto e imagen filtrada debido al tamaño finito de la lente que forma la imagen.

ondas armónicas y las reconduce al plano focal. Sin embargo, debido a su tamaño finito, no es capaz de redirigir todas las ondas, por lo que se produce un filtrado de altas frecuencias. Después del plano focal imagen, la luz sigue propagándose y a una distancia determinada, la distribución de intensidad es similar al objeto, como hemos visto. No obstante, la imagen no puede ser exactamente la misma, debido al filtrado, como se observa en la Figura 20.8. Esta imagen (test de Foucault) se suele utilizar para analizar la calidad de un sistema óptico. Para frecuencias bajas, la imagen es más o menos parecida, pero para frecuencias altas (véase la flecha) la imagen ha perdido su calidad.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE MODULACIÓN

Para conocer numéricamente y no mediante observación visual, cómo un sistema óptico modifica el proceso de formación de imágenes se utilizan diversas funciones que analizan la calidad. Una de ellas, quizás la más extendida, es la Función de transferencia de la modulación (*MTF*, Modulation Transfer Function). Es una herramienta matemática que permite medir la resolución de un instrumento óptico. Se basa en la capacidad de resolver franjas sinusoidales de una determinada frecuencia espacial. El proceso de cálculo de la *MTF* desde el punto de vista experimental es sencillo. Se tienen una serie de redes de difracción sinusoidales $I(q) = 1 + \sin(qx)$ donde varía la frecuencia espacial de la red $q = 2\pi/p$. La imagen obtenida, debido al filtrado, se modifica a $I(q) = a(q) + b(q)\sin(qx)$, donde el máximo de señal será $I_{\max}(q) = a(q) + b(q)$ y el mínimo de la señal será $I_{\min}(q) = a(q) - b(q)$. Se define contraste de la señal sinusoidal a

$$MTF(q) = \frac{I_{\max}(q) - I_{\min}(q)}{I_{\max}(q) + I_{\min}(q)}, \quad (20.23)$$

que en nuestro caso resulta $MTF(q) = b(q)/a(q)$. Un ejemplo se muestra en la Figura 20.9. Es por ello que experimentalmente podemos medir de una forma sencilla este parámetro.

Si se realiza para todas las frecuencias espaciales q obtenemos una curva, normalmente decreciente, como se muestra en la Figura 20.10, que nos proporciona una frecuencia de corte umbral a partir de la cual el sistema óptico no es capaz de observar la señal sinusoidal. Esto significa que no es capaz de ver este tipo de detalles. Este tipo de análisis no solamente permite analizar la disminución de la

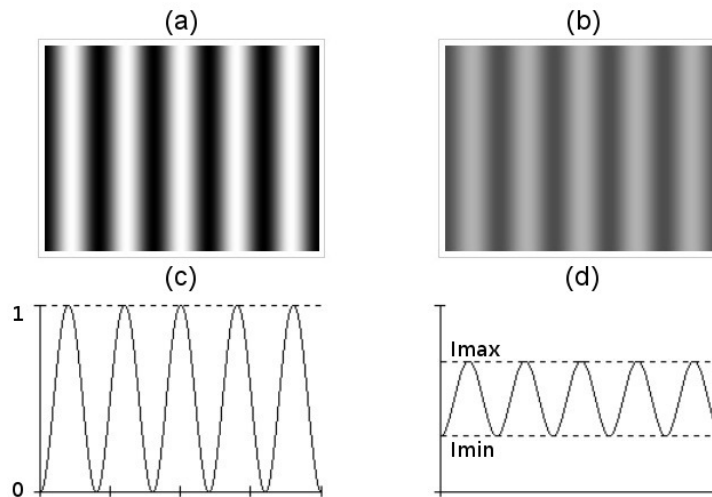


Figura 20.9: Señal sinusoidal objeto e imagen obtenida a través de un sistema óptico. La amplitud de la señal cambia y a partir de este cambio se calcula la *MTF*.

frecuencia debido a la difracción, que depende del tamaño de la lente, como se observa en la Figura 20.10, sino que nos permite analizar la calidad del sistema también con las aberraciones geométricas (esférica, coma, astigmatismo, etc.). Podemos decir que cuanto mayor es el valor de la *MTF* mejor será el sistema óptico. No obstante, debido a la difracción estos valores no pueden ser arbitrariamente altos.

FILTRADO ÓPTICO

El proceso de filtrado óptico no siempre es perjudicial, sino que a veces se utiliza para mejorar la información que nos puede proporcionar una imagen. Es típico que los fotógrafos realicen los retratos con un cierto desenfoque, para eliminar las pequeñas manchas de la piel (altas frecuencias, hay que notar que el desenfoque es una aberración y produce una disminución de la *MTF* a altas frecuencias. Ahora este proceso se suele hacer con un procesamiento digital (ordenador) de la información.

Sin embargo existen otro tipo de aplicaciones donde este procesamiento óptico es esencial, como en microscopía. El proceso del filtrado óptico de la información requiere modificar, mediante máscaras, la distribución del espectro de frecuencias espaciales. Un sistema experimental muy utilizado para realizar el filtrado óptico es el sistema $4f$, que se muestra en la Figura 20.11. El objeto se ubica a una distancia f de la primera lente, donde f es su focal. A una distancia f de esta lente la luz se focaliza y se forma el espectro de Fourier. En este plano es donde se aplican los filtros, como los mostrados en la Figura 20.12. Estos filtros dejan pasar una frecuencia y enmascaran otras. La luz se vuelve a propagar y es recogida por la siguiente lente. La imagen del objeto se obtiene a una distancia f de la segunda lente.

Los tipos de filtros más sencillos que se pueden utilizar son los filtros pasa baja, pasa banda y pasa alta, que se muestran en la Figura 20.12.

Filtrado pasa baja

El primer filtro es un filtro pasa baja que elimina las altas frecuencias, Figura 20.13. Es por ello útil para eliminar ruidos, suavizar bordes, etc. El filtro pasa

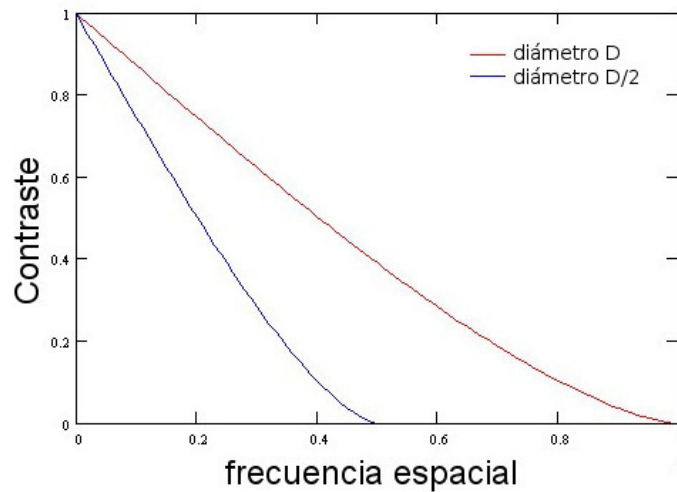


Figura 20.10: Ejemplo de dos sistemas ópticos formados por una lente cada uno cuyos diámetros son D y $D/2$ respectivamente. Si no existen otro tipo de aberraciones, podemos decir que a mayor diámetro de la lente mayores valores de MTF y, por consiguiente, mejor calidad en el proceso de reconstrucción de la imagen.

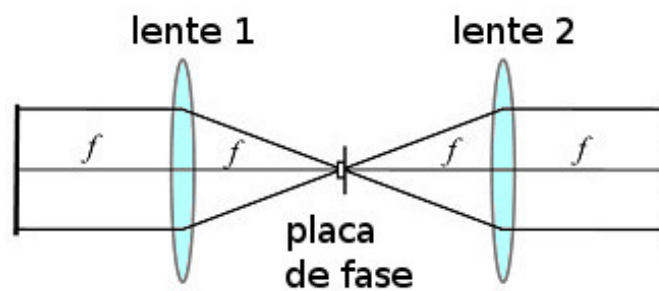


Figura 20.11: Sistema $4f$ para el proceso de formación de imágenes y, simultáneamente, obtención de las frecuencia espaciales. La máscara se ubica en el plano focal imagen de la primera imagen, que se corresponde con el plano focal objeto de la segunda lente.



Figura 20.12: Filtro pasa baja, pasa banda y pasa alta (negro es opaco, blanco transparente).

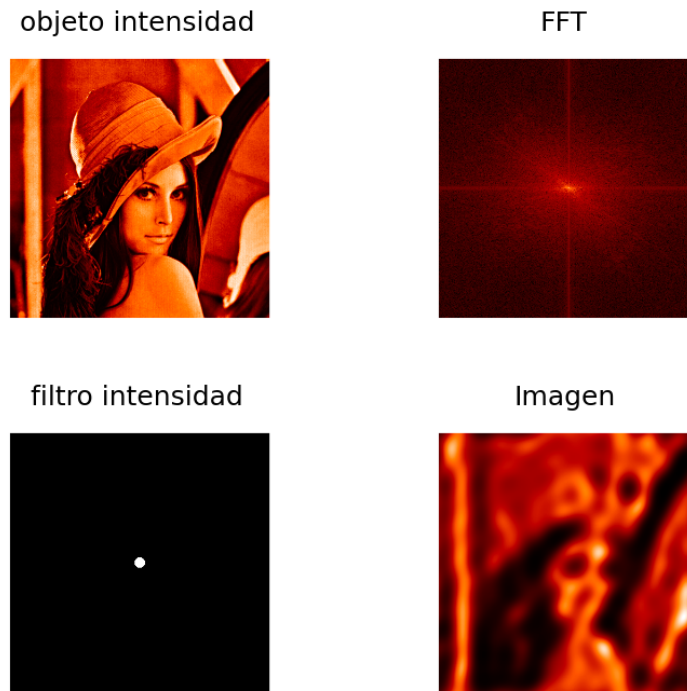


Figura 20.13: Imagen de Lena (amplitud y fase), distribución de frecuencias en el plano de Fourier, Filtro pasa baja e imagen filtrada.

alta se utiliza justamente lo contrario; deja pasar las altas frecuencias y por ello permite la observación de los bordes, el ruido y los detalles finos. El filtro pasa banda permite pasar una cierta banda de frecuencias espaciales (en modulo) y se utiliza para detectar ciertas frecuencias espaciales.

ELIMINACIÓN DE RUIDO El filtrado pasa-baja también es útil para la eliminación de ruido, fundamentalmente cuando tiene alta frecuencia, como se muestra en la Figura 20.14.

Filtrado pasa alta

En la Figura 20.15 se muestra un ejemplo más complejo de una imagen de una calle. También se muestra el espectro de frecuencias. Se observa que la intensidad mayor se concentra en la zona de frecuencias bajas. Se observa un círculo con una intensidad más o menos uniforme. También aparecen 3 líneas una vertical y otras dos con un cierto ángulo que llegan hasta altas frecuencias espaciales. Como la imagen es de cierta calidad, se observan las estructuras con las que están hechas los edificios (ladrillos, piedras, etc.) que no siguen un patrón periódico, sino pseudo-periódico. Las direcciones de las líneas están relacionadas con las perspectivas. En la Figura 20.15c se observa la distribución de señal filtrada donde solamente se dejan pasar las altas frecuencias. Finalmente se muestra la reconstrucción obtenida con esta señal filtrada, donde se muestran los bordes, además de todo el ruido asociado.

En la Figura 20.16 se muestra como utilizar un filtro pasa-alta para la detección de bordes.

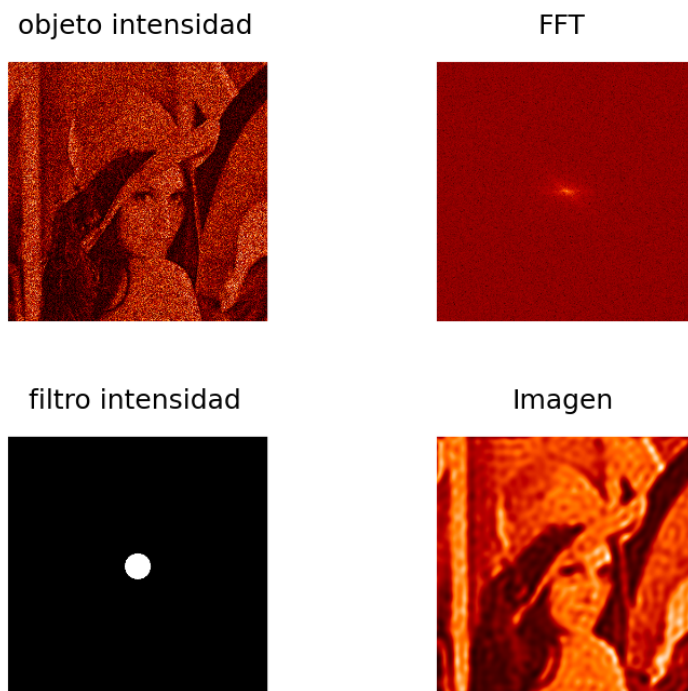


Figura 20.14: Imagen de Lena a la que se ha introducido una señal de ruido gaussiano (amplitud y fase), distribución de frecuencias en el plano de Fourier, Filtro pasa baja e imagen filtrada.

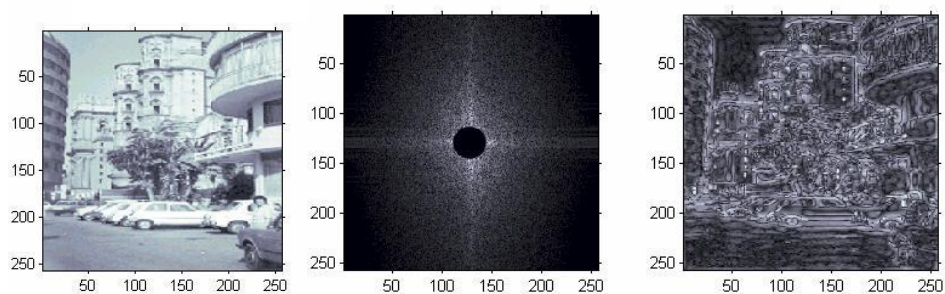


Figura 20.15: (a) Objeto, (b) Espectro después de un filtro pasa alta, (c) Imagen reconstruida del espectro de Fourier filtrado. Puesto que solamente se dejan pasar las altas frecuencias, se detectan los bordes y el ruido de la imagen.

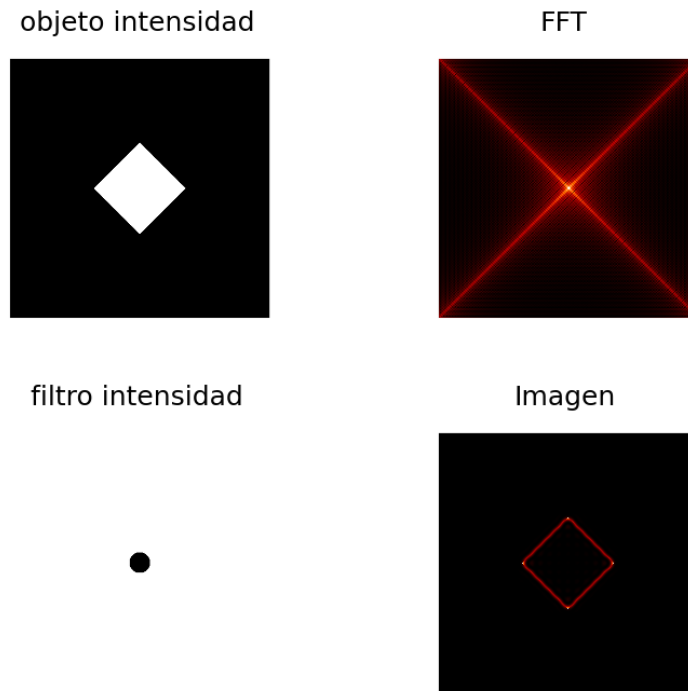


Figura 20.16: Imagen de Lena (amplitud y fase), distribución de frecuencias en el plano de Fourier, Filtro pasa baja e imagen filtrada.

Filtrado pasa banda

Veamos ahora otro ejemplo donde el filtrado pasa-banda es de gran utilidad, Figura 20.17. Existen imágenes, como las transmitidas a través de televisión (más bien antiguamente, ahora la reproducción es de gran calidad) donde las imágenes se transmiten de línea en línea y puede haber una cierta desincronización. Si se captura la imagen, ésta tendrá alteraciones perjudiciales, que se reflejarán en el espacio de frecuencias, como se muestra en la Figura 20.18. Este tipo de estructura, por su naturaleza, tiene una componente periódica y, por ello, aparecerá en el espacio de frecuencias como una distribución a una cierta frecuencia. Si con un filtrado somos capaces de eliminar estas estructuras periódicas en el espacio de frecuencias, las alteraciones se eliminarán en la imagen.

De igual forma, las fotografías de periódicos y en paneles publicitarios consiguen los niveles de gris a través del tamaño del punto. Esta técnica de reprografía se denomina “halftoning”. Las zonas negras tienen un punto negro muy grande, las zonas blancas no tienen punto y un cierto nivel de gris tendrá un punto cuyo tamaño dependerá del nivel. Nuestro ojo, debido a que también filtra las frecuencias espaciales (el iris tiene un tamaño relativamente pequeño) no es capaz de observar el moteado en las condiciones fijadas de observación, pero sí si nos acercamos excesivamente (aquellos que viajen en metro pueden observarlo claramente en los paneles publicitarios de los andenes) notaría que tiene un moteado. En la Figura 20.19 podemos ver un ejemplo, donde aparece también una estructura periódica bidimensional que, mediante un filtro de pasa-banda selectivo, se puede eliminar. La reconstrucción de la imagen elimina esta componente, generando una imagen puramente continua. Claro está, no obstante, que no es posible reproducir con es-

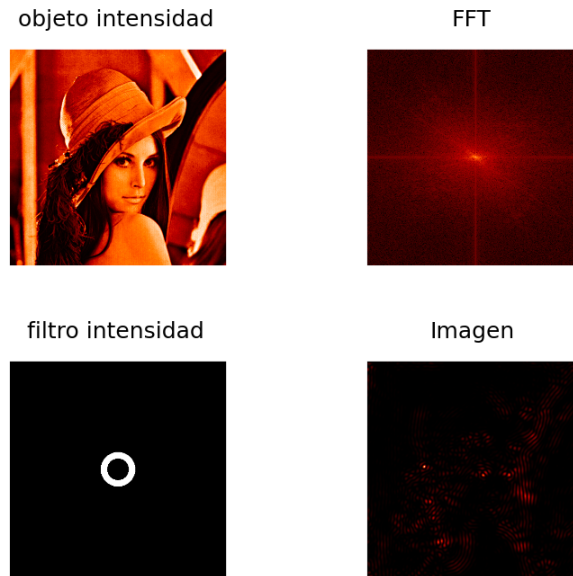


Figura 20.17: Imagen de Lena (amplitud y fase), distribución de frecuencias en el plano de Fourier, Filtro pasa baja e imagen filtrada.

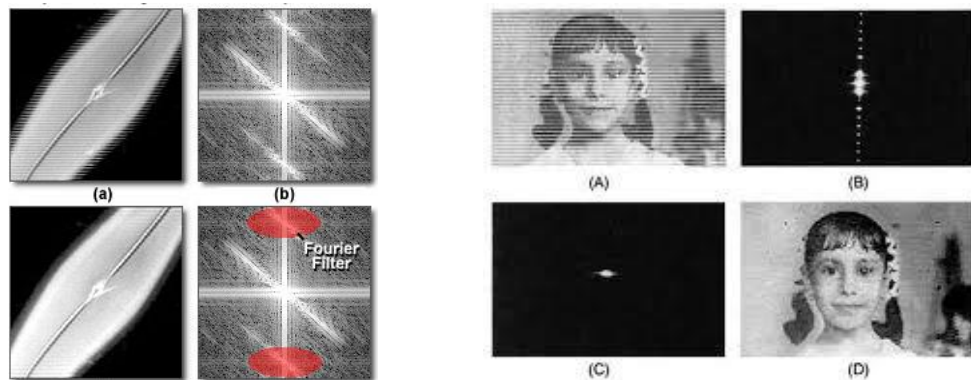


Figura 20.18: Objetos con estructuras periódicas subyacentes. Eliminación de dichas estructuras mediante un filtrado pasa-banda.

ta técnica detalles con una frecuencia espacial mayor a la frecuencia espacial del moteado.

Todos estos ejemplos nos muestran que la información que soporta la imagen, al menos la información de relevancia, en el espectro de frecuencias queda reducida a una pequeña zona del espectro, la zona central, mientras que el resto del plano focal imagen, las zonas de alta frecuencia, presenta información de alta frecuencia que puede ser debida a ruido o la reconstrucción de señales discontinuas, como los bordes, cuyo espectro de frecuencias es muy grande.

Filtrado en fase

Una aplicación de gran importancia del filtrado óptico de la imagen es la microscopía de contraste de fase, que permite visualizar de una forma sencilla objetos transparentes, con índice de refracción distinto al del ambiente. En el caso de objetos de fase, cuando la luz pasa a través de ellos, se modula según he-

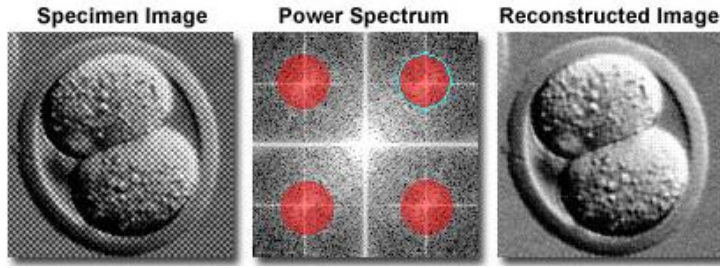


Figura 20.19: Ejemplo de imagen con halftoning, eliminación de las frecuencias seleccionadas con un filtro pasa banda e imagen continua reconstruida.

mos visto a través de la fase. Si tenemos una onda plana $E(z) = E_0 e^{ikz}$, al atravesar un objeto de fase se produce una modulación según el índice de refracción $E(x, y) = E_0 e^{i(k[n(x, y) - 1]h(x, y))}$, donde $n(x, y)$ es la variación volumétrica del índice de refracción y $h(x, y)$ es el espesor del objeto. Esta ecuación se puede simplificar como $E(x, y, z) = E_0 e^{i\phi(x, y)}$. Si la variación de fase es pequeña, podemos aproximar la exponencial por un desarrollo lineal

$$E(x, y, z, t) \approx E_0 [1 + i\phi(x, y)]. \quad (20.24)$$

La intensidad producida por el objeto de fase (supuesto un sistema de formación de imagen) resulta

$$I(x, y) \approx I_0 [1 + \phi^2(x, y)]. \quad (20.25)$$

Si el desfase es pequeño, la contribución del segundo término es despreciable.

No obstante, se puede incluir en el espacio de Fourier de la lente objetivo un filtro de fase de forma que modifique la fase del orden 0 (mediante un pequeño escalón que produzca un desfase $\pi/2$). Entonces, el campo generado será de la forma

$$E(x, y) \approx E_0 [1 * i + i\phi(x, y)]. \quad (20.26)$$

Esto hace que la distribución de intensidad resulte

$$I(x, y) \approx I_0 [1 + \phi(x, y)]^2 \approx I_0 [1 + 2\phi(x, y)], \quad (20.27)$$

que tiene una fluctuación mucho mayor, al visualizarse el término de fase de forma lineal, y no cuadrática como en el caso estándar. Despejando, se puede obtener una estimación del desfase producido

$$\phi(x, y) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{I(x, y)}{I_0} - 1 \right). \quad (20.28)$$

Finalmente, en la Figura 20.21 se tiene una muestra transparente en la cual se tiene un campo claro (microscopía estándar), campo oscuro (filtro de alta frecuencia, donde se elimina el orden 0) y contraste de fase, donde no se elimina el orden 0, pero se desfase $\pi/2$. Aunque con campo oscuro se observa mejor que con un microscopio estándar (se resaltan los bordes) es con el microscopio de contraste de fase con el que se obtienen mejores resultados.

COMPLEMENTO: FILTRADO EN REDES DE DIFRACCIÓN

En la Figura 20.22 se muestra el efecto de los filtros pasa-baja, pasa-alta y pasa-banda en tres redes de Ronchi de distintas frecuencias espaciales. La Figura 20.22b muestra la imagen obtenida con un filtrado pasa-baja. Se eliminan los bordes y las

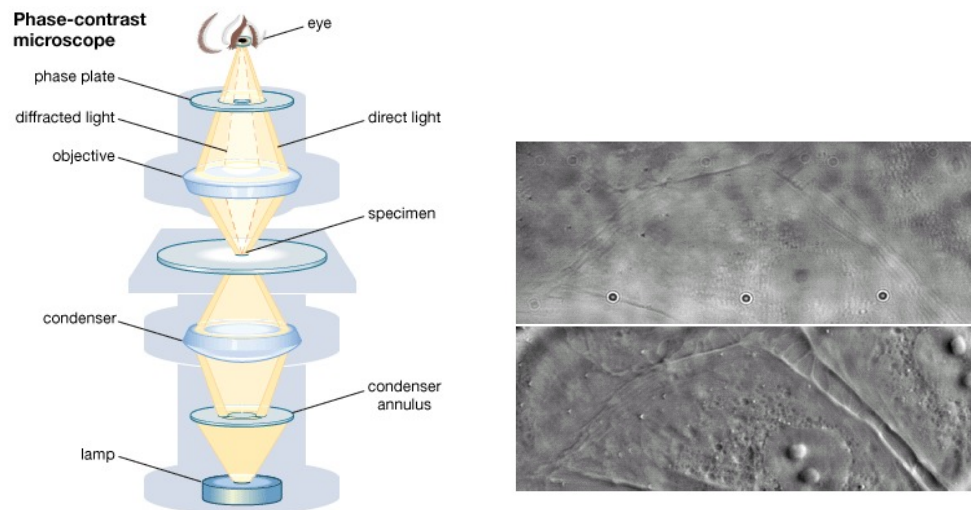


Figura 20.20: (a) Esquema de un microscopio de contraste de fase, donde se muestra la zona de iluminación, el objeto (espécimen) y el plano focal imagen, donde se ubica una máscara de fase. (b) Ejemplo de imagen de un microscopio de campo claro (estándar) y de contraste de fase para una muestra transparente.

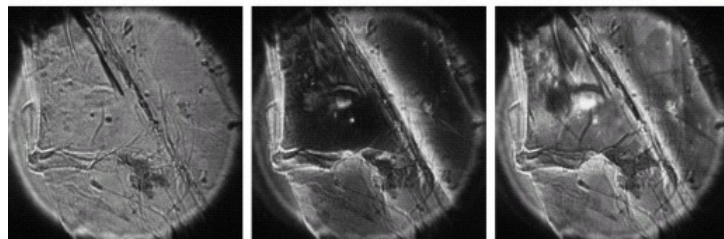


Figura 20.21: Ejemplo de imagen de un objeto transparente obtenida con un microscopio estándar, un microscopio de campo oscuro (filtro pasa-alta) y un microscopio de contraste de fase.

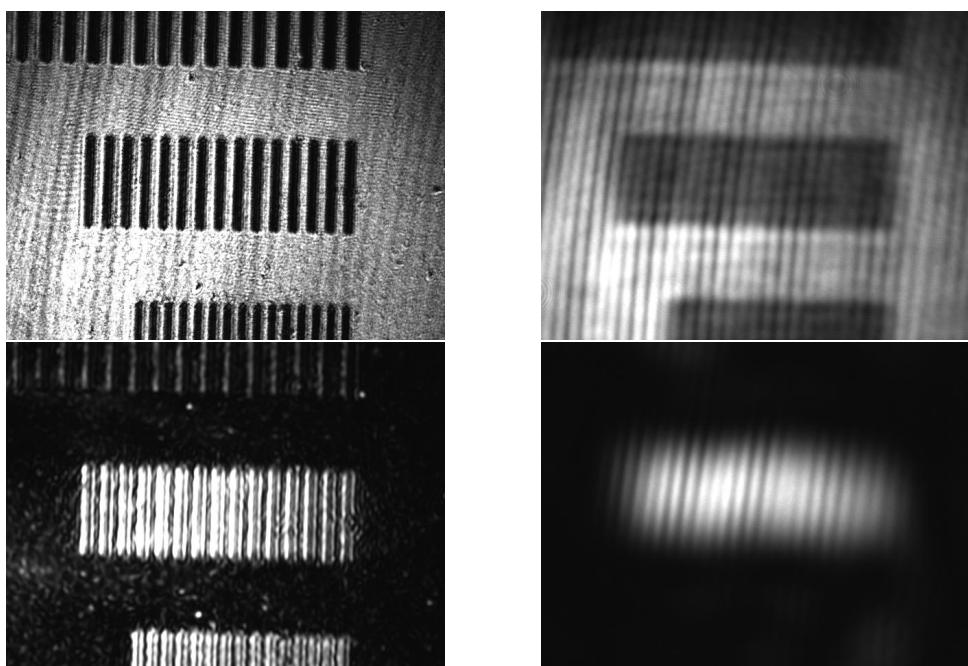


Figura 20.22: Filtrado de una red de Ronchi (que presenta una frecuencia espacial fija y sus armónicos). En la imagen se detectan tres frecuencias distintas (a) Objeto, (b) Filtrado pasa baja. Se eliminan los bordes y las modulación. Aparece una eliminación de luz en las zonas donde están las redes. (c) Filtro pasa alta. Se ha eliminado el fondo de luz (frecuencia nula) y también la red de menor frecuencia (superior) aunque se mantienen las dos inferiores de mayor frecuencia. (d) Filtro pasa banda. Solamente se deja pasar la frecuencia central. Estas imágenes son experimentales.

modulación. Hay que notar que la luz de fondo (zonas constantes) sí presentan iluminación y los pequeños ruidos en el objeto han desaparecido. En la Figura 20.22c se tiene la imagen obtenida cuando se utiliza un filtro pasa-alta. Se ha eliminado el fondo de luz (frecuencia nula) y también la red de menor frecuencia (superior) aunque se mantienen las dos inferiores de mayor frecuencia. Finalmente, en la Figura 20.22d se observa la imagen obtenida cuando se ha utilizado un filtro pasa-banda. Solamente se deja pasar la frecuencia central.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Akhmanov, S. and Nikitin, S. (1997). *Physical optics*. Oxford University Press.
- [2] Banerjee, P. P. and Jarem, J. M. (2000). *Computational methods for electromagnetic and optical systems*. CRC Press.
- [3] Bass, M., Van Stryland, E. W., Williams, D. R., and Wolfe, W. L. (1995). *Handbook of optics*, volume 1. McGraw-Hill.
- [4] Beckmann, P. and Spizzichino, A. (1987). *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, volume 1.
- [5] Born, M. and Wolf, E. (1999). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge university press.
- [6] Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear optics*. Academic press.
- [7] Cabrera, J., López, F., and López, F. (1998). *Óptica electromagnética*. Addison-Wesley.
- [8] Calvo Padilla, M. (2002). *Óptica avanzada*. Ariel.
- [9] Casas, J. (1999). *Optica*. Zaragoza.
- [10] Chaves, J. (2008). *Introduction to nonimaging optics*. CRC Press.
- [11] Drude, P. (1925). *The theory of optics*. Courier Dover Publications.
- [12] Fowles, G. R. (1989). *Introduction to modern optics*. Dover.
- [13] Goldstein, D. and Goldstein, D. H. (2011). *Polarized Light, revised and expanded*, volume 83. CRC Press.
- [14] Goodman, J. (1985). *Statistical optics*, volume 1. Wiley-Interscience.
- [15] Goodman, J. (1996). *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill.
- [16] Guenther, R. (1990). *Modern optics*. John Wiley and Sons.
- [17] Hariharan, P. (1996). *Optical Holography: Principles, techniques and applications*. Cambridge University Press.
- [18] Hariharan, P. (2003). *Optical interferometry*. Academic Press.
- [19] Hariharan, P. (2010). *Basics of interferometry*. Academic Press.
- [20] Harrington, R. F. (1961). *Time-harmonic electromagnetic fields*.
- [21] Hecth-Zajac (1999). *Optica General*. Addison-Wesley.
- [22] Iizuka, K. (2008). *Engineering optics*, volume 10. Springer.
- [23] Jackson, J. D. (1980). *Electrodinámica clásica*. Alhambra.
- [24] Jenkins, F. A. and White, H. E. (1957). *Fundamentals of optics*, volume 1.
- [25] Kunz, K. S. and Luebbers, R. J. (1993). *The finite difference time domain method for electromagnetics*. CRC press.

- [26] Landau, L. D. and Lifshitz, E. (1975). *The classical theory of fields*.
- [27] Loewen, E. and Popov, E. (1997). *Diffraction gratings and applications*. M. Dekker.
- [28] Lorrain, P. and Corson, D. (1970). *Electromagnetic fields and waves*.
- [29] Malacara, D. (2007). *Optical shop testing*, volume 59. John Wiley & Sons.
- [30] Malacara, Z. and Servín, M. (2010). *Interferogram analysis for optical testing*, volume 84. CRC press.
- [31] Malacara-Hernández, D. and Malacara-Hernández, Z. (2013). *Handbook of optical design*. CRC Press.
- [32] Mandel, L. and Wolf, E. (1995). *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press.
- [33] Mansuripur, M. (2002). *Classical Optics and its Applications*. Cambridge university press.
- [34] Ogilvy, J. (1991). *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*.
- [35] on Optical Science, C. and Engineering (1998). *Harnessing Light: Optical Science and Engineering for the 21st Century*. National Academy Press.
- [36] Palmer, C. and Loewen, E. (2000). *Diffraction grating handbook*. Richardson Grating Laboratory.
- [37] Pedrotti, F. L. and Pedrotti, L. S. (1993). *Introduction to optics*.
- [38] Popov, E. (2012). *Gratings: Theory and numeric applications*.
- [39] Rea, M. S. and others (1995). *Lighting handbook*. Illuminating Engineering Society of North America.
- [40] Reynolds, G. O., Develis, J. B., Parrent, G. B., Thompson, B., and others (1989). *The new physical optics notebook: tutorials in Fourier optics*, volume 61. SPIE Optical Engineering Press New York.
- [41] Ryer, A. and Light, V. (1997). *Light measurement handbook*.
- [42] Scharf, T. (2007). *Polarized light in liquid crystals and polymers*. John Wiley & Sons.
- [43] Sharma, K. K. (2006). *Optics: principles and applications*. Academic Press.
- [44] Smith, F. G., King, T. A., and Wilkins, D. (2007). *Optics and photonics: an introduction*. John Wiley & Sons.
- [45] Steward, E. (2004). *Fourier optics: An Introduction*. Dover.
- [46] Stone, J. M. (1963). *Radiation and Optics*. Mc Graw Hill, New York.
- [47] Winston, R., Miñano, J. C., and Benitez, P. (2005). *Nonimaging optics*. Academic Press.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- ángulo
 - Brewster, 113
 - incidencia, 103
 - límite, 108
- átomo de Lorentz, 48
- índice
 - de absorción, 81
 - de refracción, 81
- índice de absorción, 88
- índice de refracción, 81, 88
- aproximación de elemento delgado, 182
- bandas de absorción, 92
- Beam Propagation Method, 21, 180
- campo eléctrico macroscópico, 69
- campo magnético, 71
- coeficiente de transmisión, 184
- coherencia, 224
- coherencia mutua, 224
- conductividad eléctrica, 73
- constante dieléctrica, 73
- constante dieléctrica generalizada, 74
- densidad de energía espectral, 60
- desplazamiento eléctrico, 71
- difracción, 180
- dispersión cromática, 95
- divisor de haz, 239
- ecuación
 - de Cauchy, 95
 - de continuidad, 5
 - de Sellmeier, 95
- efecto Doppler, 145
- efecto Joule, 25
- elemento difractor, 182
- elipse de polarización, 35
- espectro de frecuencias para dipolo, 60
- fase, 11
- Fineza, 257
- Finite Difference Time Domain, 21, 180, 189
- frecuencia de plasma, 98
- frecuencia de resonancia, 50
- frente de ondas, 13
- fuentes
 - coherentes, 230
 - incoherentes, 230
- fuerza de Lorentz, 5
- función de Green, 193
- Función de transferencia de la modulación, 284
- grado de coherencia, 224
- half-toning, 289
- intensidad mutua, 230
- irradiancia, 27, 76
- lámina compensadora, 242
- longitud de coherencia, 226
- longitud de correlación, 230
- Longitud de onda, 16
- luz linealmente polarizada, 36
- luz natural, 38
- máscara, 182
- máximo interferencial, 171
- magnetización, 71
- medio ópticamente denso, 68
- medio homogéneo, 75
- medio isótropo, 75
- momento dipolar por unidad de volumen, 88
- onda
 - armónica, 10
 - armónica plana, 13
 - esférica, 8
 - plana, 9
- paquete de ondas, 147
- perfil Lorentziano, 150
- permeabilidad magnética, 5, 73
- permitividad eléctrica, 5
- plano
 - incidencia, 103
- plano de Fourier, 281
- plano de polarización, 34
- polarizabilidad, 88
- polarización
 - circular, 37
 - elíptica, 37

- lineal, 36
- polarización, 71
- potencia esparcida, 61
- potencia extraída, 55
- profundidad de penetración, 85
- pupila, 278
- representación compleja, 11
- resolución angular, 220
- sección eficaz
 - de extinción, 55
 - de scattering, 61
 - de una carga libre, 61
- susceptibilidad eléctrica, 72
- susceptibilidad magnética, 72
- teorema de Poynting, 25
- Teorema de van Cittert-Zernike, 232
226
- test de Foucault, 284
- tiempo de coherencia, 226
- Transmitancia máxima, 257
- vector
 - de atenuación, 81
 - de ondas, 81
- vector de ondas, 10
- vector *de Poynting para medios materiales*, 76
- velocidad
 - de grupo, 147
- visibilidad, 165, 257
- zona de ondas, 57

